第一工科大学教職課程研究紀要
2023 年 12 月号（通巻 8 号）

2023 年度

第一工科大学教職課程教育研究会

目次

研究論文

電気・電子・情報系初学者における数学教育に関する一考察
—双対性の概念の導入による学修の促進—

第一工科大学　工学部　情報電子システム工学科　當金一郎

要旨
本稿では，本学の情報電子システム工学科で 1 年次カリキュラムに配置されている「情報・電子基礎数理Ⅰ」「情報・電子基礎数理Ⅱ」の、学科教育における位置づけを述べると共に、そこで扱われている「双対性の概念」が、電気・電子・情報系の学修に対してどのような教育的意味合いを持つかについて考察する。通常、電気・電子・情報系学部及び学科学生に対する「数学教育」としては、一般教養課程において「理学部・数学科」の出身者が実施する「汎用的な数学」と、専門課程において工学部の「電気」「電子」「情報」学科の出身者が担当する「電気数学」があるが、一般に両課程間の交流はあまり行われないため、整合性のとれた「一気通貫の数学教育」となっていないことが多い。しかし例えば「電気回路」における「複素電気」など、電気・電子・情報系の学修内容は様々な「数学」を用いて表現されるものが多く、かつ実際にそれらを使った計算が専門課程の科目では頻繁に出現する為、入学した直後からこれに対応した数学教育が行われることが望ましい。筆者は現在 1 年次における上記の両授業を担当しており、この観点から「情報・電子基礎数理」の授業中で、この「複素電気」に関する内容を扱い、更にそこにおいて「双対性」の概念を紹介、三角関数を用いた計算との整合性を解説している。この「双対性」は、その後の電子・電波系における「フーリエ変換」、及び「制御工学」の授業で展開される「ラプラス変換」においても重要な概念であり、この解説が本学科の学生の学修の促進に寄与していると考えている。
キーワード：数学教育、双対性、複素電気、フーリエ級数、フーリエ変換、ラプラス変換

１．はじめに

第一工科大学工学部情報電子システム工学科は 2007 年に従前の「電子工学科」から学科名称変更する際に、カリキュラムを大きく見直して「Web デザイン概論（現 Web アプリケーション）」「マルチメディア工学」「Java プログラミング（現オブジェクト指向プログラミング）」などの情報系科目を取り入れたが、併せてそれまで「応用数学（現応用解析学）」の名称で 2 年次に開講されていた、電気系科目を学ぶための「電気数学」の授業とは別に、「電気工学」「電子工学」「情報工学」で扱われる基礎的な数学を 1 年次に教授する為の科目として「情報・電子基礎数理Ⅰ」「情報・電子基礎数理Ⅱ」を開講することとした。これは
１）本学に入学してくる学生は、「普通高校」以外の「工業高校」「商業高校」の職業系高校の出身者が毎年一定数おり、これは情報電子システム工学科においては、他学科に比較して「普通高校」出身者の比率が若干高いものの同様であって、この為、数学的教養のばらつきが非常に大きいまま新入生に対する大学教育をスタートするという状況が発生している。
２）本学の「共通教育センター」において「大学において学ぶ必要のある数学」として新入生全員に教えられているのが、工業化社会における「モノづくり」において重要であった「微分積分」及び、それを学ぶための基礎としての「高校数学のリメディアル教育」であり、情報化社会において重要な「線形代数」を含む「離散数学」などの内容が必須の数学的教養と

して教えられていない。
３）「共通教育センター」における「数学」授業は、情報電子システム工学科を含む「全学科の新入生」を、成績によって輪切りして作成したクラス毎の教育を行うものであり、従って情報電子システム工学科の新入生向けに特化した内容の教育を、「共通教育センター」の科目の中で、担当の教員に依頼することに無理がある。
４）「情報電子システム工学科」で１年次から教えられている科目として「電気回路」「電子回路」があり、特にその中の「交流理論」（電気回路）においては「オイラーの公式」「ド・モアブルの定理」「双曲線関数」といった内容が、又「増幅回路」「発信回路」「パルス回路」（電子回路）においては「行列」「行列式」「フーリエ変換」などの知識が用いられるが、1年次前期からこれらの概念を実践的に学び、また計算演習を行う機会がない。
５）更に３年生以降「コンピュータグラフィックス（アフィン変換）」「画像情報工学（離散的コサイン変換）」「制御工学（ラプラス変換）」などの高度かつ応用的な数学の内容を扱うため、１年次からそれらに繋がる数学的素養を身につけさせる必要がある。
６）本稿の筆者は大学・大学院で数学を学んだ後、電力系企業において電気系の制御を含む各種計算処理プログラムを開発した経験を経て本学に赴任しており、「数学」「電気」「電子」「情報」の分野横断的な知見を有していること、更に著者の所属が「共通教育センター」ではなく「情報電子システム工学科」となっていることから、「学科にとって必要とされる数学の内容」の科目を独自に設定し、「情報電子システム工学科」の学生に特化して教育することで、上記の問題を解決する授業を行う事が可能である。
という状況があった為である。
特に４）及び５）に関しては「高校」までの教えられてきた数学とは、大きく異なる視点から数学を捉える必要があり、それに留意した観点を導入して授業を構成することとした。

２．電気・電子・情報系の学習内容と道具としての数学の必要性

電気・電子・情報系の学生が、その分野を学ぶ際に一番の障害となるのが、これらの学問が扱う対象が基本的に「目に見えないもの」である、ということがある。もちろん、電気は「灯り」や「モーター動力による回転」の形になれば「目に見える」し、情報系が扱う対象も「画面出力や印刷物」として「その内容を見えるようにする」事は可能である。しかし、建築系におけるビルや住宅のパース図、あるいは土木系における橋梁模型やダム模型、更には自動車の設計時に用いるクレイモデルのような「皆が一目でその概要が理解できる」モデルは電気・電子・情報系には存在しない。

更に他の工学系の学問は「流体」のような「扱う対象を取り巻く環境を考える場合」以外、「時間と共に変動する」現象を扱うことが比較的少ないのに対して、電気・電子・情報系で学ぶ内容は、殆どが基本的にその中に「時間軸」を内在するものとなる。

例えば、電気工学において「直流」であれば時間による変動はないが、「交流」はsin関数で表現される振動の現象である。これは電気を用いた信号の処理を扱う電子工学、更にアル

ゴリズムによるデータ変換を扱う情報工学においても同様であり、いずれにおいても「動的対象」を表現できるツールが必要とされる。

この「扱うものが目に見えず、更にその対象の動きを表現しなくてはならない」という状況を解決する為に必然的に必要とされるのがさまざまな「数学」である。

例えば、電気回路において「長さlの長距離送電線の受電端において必要とされる電圧をE_r、電流をI_r」とした時、線路の特性インピーダンスをZ_0、伝搬定数をγに対して、この条件を満たす送電端の電圧E_s、電流I_sは、双曲線関数を用いて以下のように表される。[1]

$$E_s = E_r cosh\gamma l + Z_0 I_r sinh\gamma l、I_s = \frac{E_r}{Z_0} sinh\gamma l + I_r cosh\gamma l$$

又電子計測においては得られたデータを基に最小 2 乗法を用いてセンサーの特性を同定する必要があり、そこで用いられるのは「統計学」の知識と「偏微分」を用いた式変形である。更に、フーリエ変換は電波による伝送信号の処理のようなスペクトル解析のみならず、画像における空間周波数の処理による各種フィルタリングにおいて重要な役割をはたしている。以下に現在、情報電子システム工学科のカリキュラムに登場してくる様々な数学の分野・内容を挙げる。(表 1)

表１　情報電子システム工学科のカリキュラム（令和４年度）で登場する数学

1 年次	【電気回路Ⅰ、Ⅱ】三角関数、複素数、Taylor-Maclaurin 展開、 オイラーの公式 【電子回路Ⅰ】行列
2 年次	【応用電気回路】フーリエ級数、微分方程式、双曲線関数 【情報通信ネットワークⅠ】フーリエ変換 【デジタル回路Ⅰ】2 進数、16 進数、論理代数
3 年次	【コンピュータグラフィックス】２次曲線、２次曲面、 パラメトリック曲面、アフィン変換 【画像情報工学】回帰分析、主成分分析、離散的フーリエ変換、 離散的コサイン変換、最尤法 【電子計測Ⅰ】回帰分析（最小２乗法） 【情報理論Ⅰ、Ⅱ】情報エントロピー、ガロア体、拡大体
4 年次	【制御工学】ラプラス変換 【情報システム工学】線形計画法、動的計画法、正規分布、β分布、 三角分布、指数分布、ポアソン分布

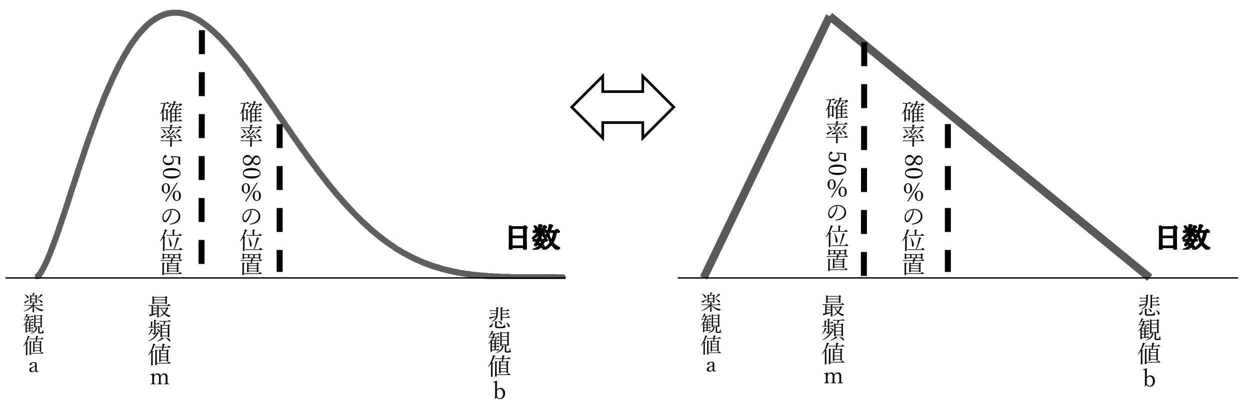
３．「専門数学」と「教養数学」の相違点

２．で「ツールとして」、「数学を用いて」と述べたが、実際には一般的に言われる「数学」には大きく、「理学部・数学科」で扱われる「専門数学（純粋数学)」と、理工系を含む大学

の教養課程で教えられる「教養数学」の２種類がある。

「専門数学（純粋数学)」は「数理現象」を解明することを目的に研究・教育が行われるものであり、そこで重視されるのは「(数学的）厳密性」や「論理」である。例えば「収束」の概念は高校でも教えられるが、高校数学の範囲では「n が限りなく大きくなっていき、これに従ってa_nがある一定の値αに限りなく近づいていくとき、数列a_nはαに収束するという。」と直感的に定義されていたものが、理学部数学科では「数列a_nがαに収束するとは、次の条件を満たすことである。」として「任意の$\varepsilon > 0$に対し、番号Nで、$n \geq N$ならば$|a_n - \alpha| < \varepsilon$を満たすようなものが存在する。」と「$\varepsilon - \delta$」論法を用いたものとして教えられる。即ち「専門数学（純粋数学)」は「直感」ではなく「論理」を用いて、かつ曖昧さを持たない厳密な定義による体系として、様々な事象（数理現象）を表現、あるいはそこにおける「普遍的真理」を解明していく。

一方これに対して、「教養数学」における「数学」とはあくまでも、その後学ぶ様々な各種学問の現象を「表現する」「計算する」「思考する」ための「ツール」であって、そこでは「専門数学（純粋数学)」のような「(数学的）厳密性」や「論理」は必ずしも重視されない。むしろ現実をいかにうまく表現し、そこにおける諸問題を簡易に解決できるか、が大切であり、「計算」も「加減乗除」のレベルで解ける事が望ましい。例えば「情報システム工学」の授業では「工程管理の技法」として、各工程の平均所要時間を、これまでの経験値から算出された「楽観値」「悲観値」「最頻値」を基に、「確率」概念を用いた三点見積もりを行う手法を取り扱うが、その際に用いられる「β分布」と「三角分布」では、計算の手間が少ない「三角分布」の方が「より優れている」とされている、などはこの好例である。（図１）



β分布：$\mathrm{E} = (a + 4m + b)/6$

$\mathrm{p} = (E - a)/(b - a)$、$q = (m - a)/(b - a)$

$\alpha = p(2q - 1)/(q - p)$、$\beta = (p - 1)(1 - 2q)/(q - p)$

として$f\left(\mathrm{x}, \alpha, \beta, a, b\right) = \frac{(x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)(b-1)^{\alpha+\beta-1}}$　$(a \leq x \leq b)$

「確率 s%の点」は上記の積分より計算する（複雑）

三角分布：

(1)確率 50%の点＝（a+m+b）/3

(2)確率 80%の点 s は$\frac{b-s}{b-m} = \sqrt{\frac{1}{5} \times \frac{b-a}{b-m}}$

の解として簡易に計算可能である。

図１　情報システム工学における「工数見積もり」の手法比較（β分布、三角分布）

但し、あくまでも「数学」を使う以上は、その意味する内容が「明確」であって、更に計算に際しては「正確」なものである必要がある。例えば「高校数学」において登場する「指数関数$y=a^x$」は、高校においては指数の意味を「自然数Nの範囲」における累乗「a^m」から、「整数Zの範囲」⇒「有理数Qの範囲」と拡大していくものの、「実数Rの範囲」への拡張を実際には説明せず、「グラフ」として提示して終わっている。これは高校では「実数とは何か」を明確に定義しないまま、{実数} ＝ {有理数} ∪ {無理数} として、いわば「漠然としたもの」として扱っているからであるが、大学では「デデキントの切断」あるいは「コーシー列」によって有理数体Qを完備化したものとして実数体Rを定義し、更にその拡張としての「指数関数$y=a^x$」の定義を行う必要性がある。

４．双対の概念の定義と「狭義の双対性」

　双対とは一般的には「対になっている２つの対象が、ある意味で互いに『裏返し』の関係にある」場合を指す言葉であり、又２つのものが互いに双対の関係にあることを「双対性がある」と言う。この「裏返し」とは具体的にどのようなものを指すかは必ずしも明確に定義されているわけではないが、特に数学においては「双対性」として、ある数学的対象 A からなんらかの手続きで数学的対象 B を構成することができ、他方 B からもなんらかの手続きで A を構成することが出来る状況、を指すことが多い。
例えば「射影幾何学」における「円錐曲線に内接する任意の六角形の三組の対辺の交点は同一直線上にある」という「パスカルの定理」と「円錐曲線に外接する六角形の対応頂点を結ぶ三本の対角線は一点で交わる」という「ブリアンションの定理」は「双対性」を用いて、一方からもう片方が生成される代表例である。（図２）[2]

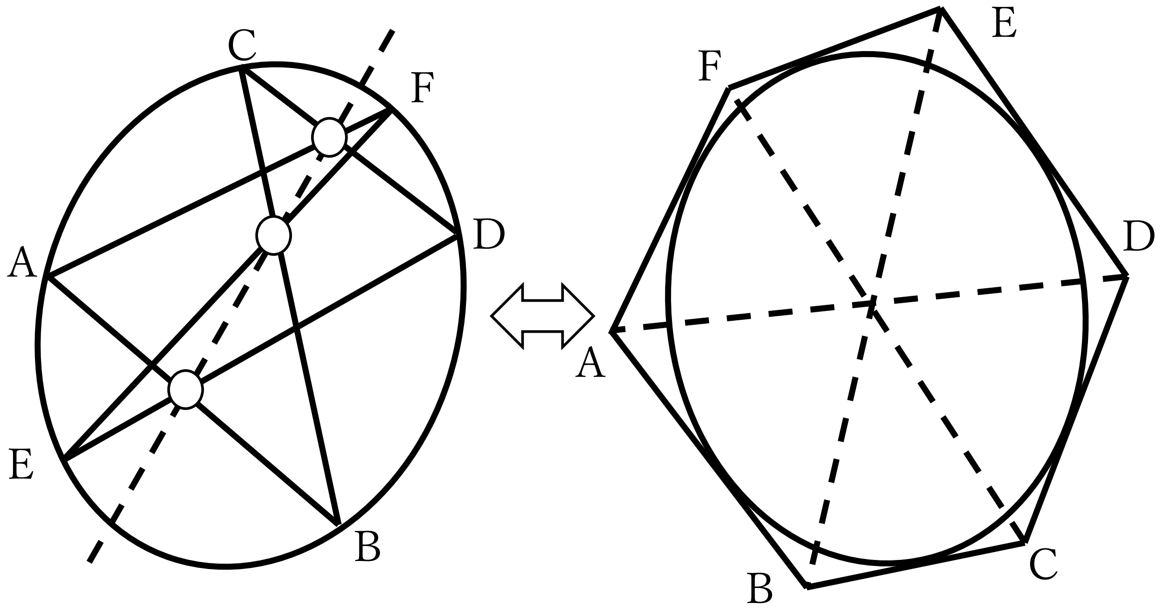


図２　数学における「双対性」を用いた変換の例（「パスカルの定理」と「ブリアンションの定理」）

これは「AとBが実質的に等価になっている」ことを意味し、このように「ある対象」における「ある現象」あるいは「ある定理」から「その対象を別の対象に置換する」ことによって、新たに「別の対象の現象や定理」が生み出される場合、これを「双対の原理」と呼ぶ。

今見た「射影幾何学」における「パスカルの定理」と「プリアンションの定理」では、片方の「点」を「線」に、「線」を「点」に置き換えることによって、もう一方が得られる、という関係になっている。

このような意味の「双対性」は電気回路においても成立し、その際は「電圧源⇔電流源」「インダクタンス⇔キャパシタンス」「抵抗⇔コンダクタンス」「インピーダンス⇔アドミッタンス」「並列⇔直列」「ループ⇔カットセット」「開放⇔短絡」の置き換えによって、ある回路を別の回路に置き換えることが可能であり、そこにおいて「電流⇔電圧」「キルヒホッフの第一法則（電流則）⇔キルヒホッフの第二法則（電圧則）」などの法則の置き換えが成立する（図３）。

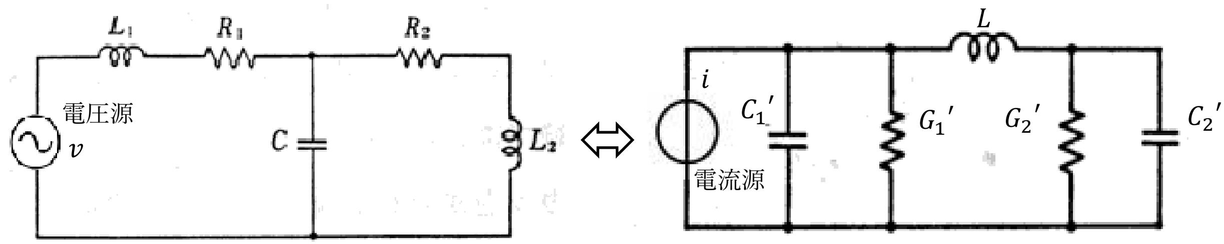


図３　電気回路における「双対性」を用いた変換の例

この「ある対象における、なんらかの現象や法則を、別の対象における現象や法則に置き換えることが可能である」という事実は、「美しい数理現象の例」として「科学的な観点からの興味・関心」を有する学修者の心を捉えるものであるが、しかし一方でこのような「双対性」は応用面、特に「工学的な意味」での「設計」や「評価」といった、ある目的を到達するためにこれを活用する、といった観点からは「有用性が低い」と考えられ、その意味では「狭義の双対性」と呼ぶべきものであると言える。

５．「広義の双対性の概念」と電気・電子・情報系における具体的事例

４．の「狭義の双対性」に対し、電気を始めとする工学分野の学問、更には数学においても、２つの空間の間で成立する、より広い意味での「裏返し」の関係性が存在する。
そして実際にはこの言わば「広義の双対性」と呼ぶべきものが、応用面での有用性が高く、それを用いた各種の解析や設計あるいはシステムの構築などが行われている。

例えば関数解析学においては「ある体F上の線形空間Vに対して、その空間上の「線形写像」$\varphi: V \to F$の全体、即ち「線形汎関数の全体」として、「新たな線形空間V^*」を「双対空間」として定義し、その「双対空間」V^*におけるテンソルを調べることで、元の線形空間Vにおける超関数などの性質を調べる際に大きな役割を果たしている。

このような「裏返し」の関係にある「空間」における様々な法則や性質を調べる事によって、「元の空間」における法則や性質を導くことが可能になる、というのが、数学を始めとする理工系の学問において「広義の双対性」を利用する大きな理由となっている。
電気・電子・情報系の学問においては、交流電気における複素数を用いた計算や電波工学・電子工学における「フーリエ変換」を用いたスペクトル解析、あるいは制御工学における「ラプラス変換」を用いた安定システムの設計など、多くの分野でこの「広義の双対性」の概念を用いた理論が展開されている。

一方、この「広義の双対性」を利用する際に意識しなくてはいけないこととして、その「双対の空間における法則や性質」が「元の空間における法則や性質」から矛盾なく導かれること、更にはその為の「逆変換」の対応式や関数、あるいは変換法則が具体的に用意されている必要がある、ということがある。
しかし実際には講義中でこの「逆変換」については、その内容の説明が省略されていることが多く、初学者にとっては「なぜ変換した形で計算することによって、元々の問題の答えが出るのか」を理解する上で高いハードルとなっている。
以下これについて事例を挙げながら、現在担当授業の中で行っている工夫について述べる。

(1) 交流電気における複素数による表現と計算

通常、初学者に対する「交流」電気の定義は「極性が時間と共に変動する」三角関数を用いた「瞬時値式」$E_m \sin(\omega t + \theta)$で行われるが、この表現に関しては発電機の動作図などを参考に比較的容易に理解することが可能である。(図４)

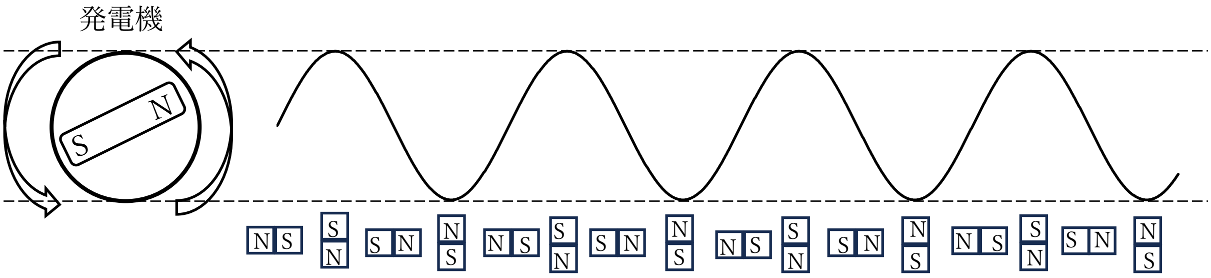


図４　交流電気の発電機の挙動と瞬時値式$e(t) = E_m \sin(\omega t + \theta)$を用いた表現

しかし続いて、この$E_m \sin(\omega t + \theta)$が「最大値$E_m$、角周波数$\omega$、位相$\theta$」の三つの値により特性が与えられるものであり、そして同じ周波数帯で運転されている系統においては、ωはその中で一定であるから特性値から除外できる、として、通常「電気回路」を扱う授業ではこれを「実効値$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$」と「位相θ」を用いた「フェーザ＝静止ベクトル」$\dot{E} = E\angle\theta$として扱うことができる、と「天下り式」に教えるのが一般的である。そしてこの静止ベクトルを更に「複素平面」上に配置して、複素数$\dot{E} = Ecos\theta + jEsin\theta$として考えることにより、直流と同様の「オームの法則」「キルヒホッフの法則」などの各種計算を行う事ができると説明、

演習による学習内容の強化が行われる。通常はこのようにして、電気の初学者にとって感覚的に納得がいった瞬時値式による表現を置き去りにして、感覚的にはどうしてそれで扱って良いのかが明確に理解できない「複素数」を使って授業が進んでいくことになる。

そこでこのような状況を改善する為に「電気回路Ｉ」と並列に授業を実施している「情報・電子基礎数理Ｉ」において、筆者は以下のような組み立てで上記を補足することにした。

① 前半部の授業において「関数」の単元において、中学校・高校における「式としての関数」ではなく、小学校で直感的に扱っている「写像としての関数」を説明。更にこれに付随する概念として「関数近似」の概念及び、その具体例として「Taylor-Maclaurin 展開」による三角関数、指数関数の表現を紹介する。

② 続いて「複素数」の単元で、①を用いた「オイラーの公式」$e^{j\theta} = cos\theta + jsin\theta$を教えて、複素数の「直交座標表示」「指数関数表示」「極座標表示」の３つの表現を教える。

③ その後の「三角関数」の単元で「三角関数の周期性と値の変化」「正弦波の和」の各公式を説明。更にこれを用いて「交流回路におけるキルヒホッフの第一法則」において「瞬時値式＝三角関数による表現」と「静止ベクトル＝複素数による表現」が、計算において同等である（「双対」である）ことを、図を用いて説明する。（図５）[3]

④ 更にインダクタンスL及びキャパシタンスCにおける電流と電圧の関係が

$$L\ :\ e = \frac{d}{dt}LI\,sin(\omega t + \theta) = \omega\,LIcos(\omega t + \theta) = \omega LIsin\,(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2})$$

$$C\ :\ e = \int \frac{1}{C} I \sin(\omega t + \theta)\,dt = -\frac{I}{\omega C}\cos(\omega t + \theta) = \frac{I}{\omega C}\sin\,(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2})$$

と表現される事、及びこの複素数による表現が$\dot{V} = j\omega L\dot{I}$、$\dot{V} = -j\frac{\dot{I}}{\omega C}$を示し、これにより交流においてもインピーダンス$\dot{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$を用いて「オームの法則」$\dot{V} = \dot{Z}\cdot\dot{I}$、及び「キルヒホッフの第二法則」$\sum_{i=1}^{m}\dot{E} = \sum_{j=1}^{n}\dot{Z}\cdot\dot{I}$が成立することを示して、「複素数による表現」の正当性を確認させる。

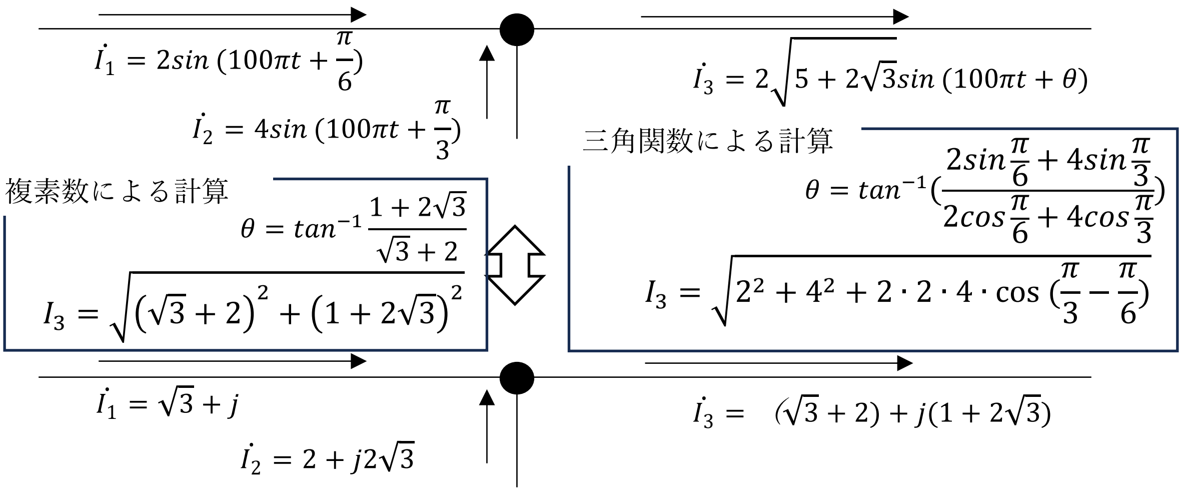


図５　交流電流の三角関数による表現と複素数における表現における同等性

(2)フーリエ級数とフーリエ変換の関係と電気・電子系における位置づけ

フーリエ級数とフーリエ変換は2年次からの「ひずみ波の解析」や「フィルタの設計」など様々な電気・電子系の分野における学習で使われるツールである。
更に近年は「画像処理」などの情報系の分野においても「空間周波数の解析と処理」において、フーリエ変換のデジタル信号に対する拡張であるDFT、FFTなどの知識は必須のものとなってきている。

この2つに関しては実際にカリキュラムで登場する授業が筆者の担当でない 2 年次以降の科目である事から、(1)の内容に関連して以下のタイミングで説明を行う事とした。

① フーリエ級数は「周期関数$f(t)$」に対する関数近似の手法であり、その意味では「Taylor-Maclaurin 展開」と同等の概念である。そこで「Taylor-Maclaurin 展開」の話をする際に「フーリエ級数は元々の周期関数$f(t)$の周期Tに対して$\omega = \frac{2\pi}{T}$を基本角周波数とするωによって$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, sin(n\omega t + \varphi_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\, sin\, n\omega t + b_n cosn\omega t)$と展開されるものである」とスライドによる図示を示しながら解説を行っている。(図6)その際「双対性」の概念を用いる必要はない為、学生の理解はスムーズである。

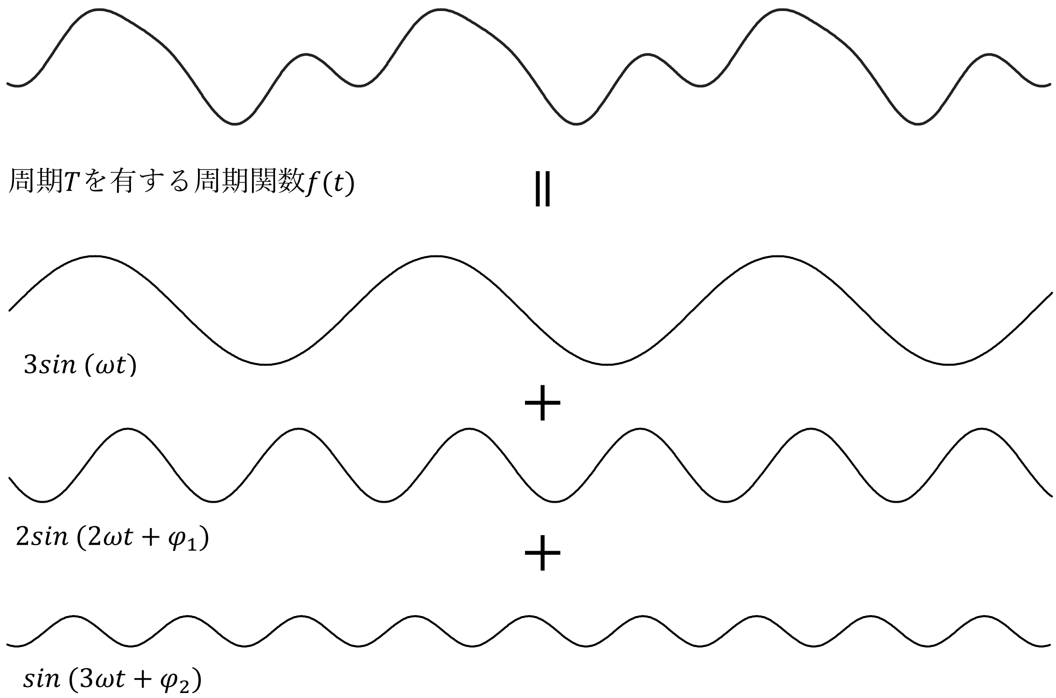


図6　フーリエ級数による周期関数の展開

② フーリエ変換はフーリエ級数を周期関数以外の関数まで拡張する為に導かれたものであり、オイラーの公式から得られる$sinn\omega t = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{j2}$、$cosn\omega t = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}$を上記のフーリエ級数の展開式に代入し、先の周期$T$を「$T \to \infty$」として得られるものである。しかしこの式展開は難解であり、又学生にとっては、それを理解する意味合いが希薄であることから、通常は複素積分を用いた$\mathcal{F}(f(t)) = F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt$という式に

より、最初から「天下り的に」フーリエ変換を定義するのが一般的である。

即ちフーリエ変換は、「逆変換」$\mathscr{F}^{-1}\big(F(\omega)\big) = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$の式と共に、本質的には「時間領域」⇔「周波数領域」の「双対性」により定義されたツールとして学習者には通常認識される。実際フーリエ変換は熱伝導方程式や波動方程式などの偏微分方程式の解法において良く利用され、その際はこの「双対性」が用いられる。

例えば「初期条件$u(x,0) = f(x)$が与えられた無限に長い棒状の物体における、時間tにおける温度$u(x,t)$を求める熱伝導方程式」$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdots (a)$を解くことを考える。

（但しκは熱伝導係数）

ここでtを定数と見なして、$\mathscr{F}[u(x,t)] = U(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} ue^{-j\omega x}dx$と置き、積分と微分の順序が入れ替えられるとして上記(a)の両辺をフーリエ変換すると下記のようになる。

$$(a)\text{の左辺：}\mathscr{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-j\omega x}dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-j\omega x}dx = \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$(a)\text{の右辺：}\mathscr{F}\left[\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \kappa(j\omega)^2U(\omega,t) = -\kappa\omega^2U(\omega,t)$$

この両者が等しいことより、$\frac{\partial U}{\partial t} = -\kappa\omega^2U(\omega,t)$

これはtについての 1 階微分方程式であり、これを解くと$U(\omega,t) = A(\omega)e^{-\kappa\omega^2 t}\cdots(b)$

また、$u(x,0) = f(x)$より、$U(\omega,0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-j\omega x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx$

(b)に$t = 0$を代入して、$U(\omega,0) = A(\omega)e^0 = A(\omega)$より、$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx\cdots(c)$

(c)を(b)に代入して、これをフーリエ逆変換すると

$$\mathscr{F}^{-1}\big(U(\omega,t)\big) = u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\omega,t)e^{j\omega x}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{-\kappa\omega^2 t}e^{j\omega x}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-j\omega y}dy\right\}e^{-\kappa\omega^2 t}e^{j\omega x}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa\omega^2 t}e^{j(x-y)\omega}d\omega\right\}f(y)dy$$

この最後の式の{　}内の積分は、いわゆる「ガウス関数」の積分であり、

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa\omega^2 t}e^{j(x-y)\omega}d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{\kappa t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}$ となる。

∴　求める方程式の解は　$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}dy\cdots(d)$　である。

初期条件として例えば「原点のみに熱源がパルス状に与えられた」場合は、$f(x) = \delta(x)$となり（但し、$\delta(x)$はディラックのデルタ関数）、これを(d)に代入すると

$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}}e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}}$　となる。

このようにフーリエ変換は様々な偏微分方程式で表される表現される現象を解き表す強力なツールとして使用されるが、しかし一方で電気・電子・情報系に限って言えば、電磁気学における場合を除いては、このような事例はあまり多くはない。実際上この分野ではフーリエ変換は「フーリエ級数」の「定義域（周波数領域）の拡張（整数→実数）」として扱われることが多く、先に見た DFT、FFT などもその範疇に入っている。

従って１年時においては「双対性」を用いた手法としての解説は行わず、あくまでも「フーリエ変換」を「フーリエ級数の延長」としての範囲に留めて説明している。

(3)ラプラス変換と制御システム応答解析

ラプラス変換はフーリエ変換の公式で、$t < 0$における$f(t) = 0$とし（従って積分において$t < 0$は考えなくて良い)、更に角周波数ωに対する$j\omega$を変数sで置き換えたものである。

ラプラス変換の定義　：　$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$

この「ラプラス変換」においては、フーリエ変換における「フーリエ級数」のような存在はなく、従って電気・電子・情報系の分野においては(1)の「交流電気の複素数を用いた表現」と同様に、「双対空間（ラプラス変換の場合は「s領域」という)」において成立する様々な性質を用いて、元の「時間領域（t領域)」における性質を考察する、という手法を用いるものとなっている。このラプラス変換の逆変換は「ブロムウィッチ積分路」とよばれる積分路による、次の複素積分で与えられる。

逆ラプラス変換の定義　：　$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(s)e^{st}ds$

（但し、γは実数で、$F(s)$の極の実部の最大値よりも大きくとるものとする）

このラプラス変換における「双対性」の概念も「フーリエ変換」と同様、一般的な「微分方程式の解法」で用いられるが、特に制御工学においてはラプラス変換された後の「s領域における制御対象及び制御システムの安定性」が考察の主たる対象となり、その意味で４年次の「制御工学」の授業中で、このラプラス変換は議論の本質な部分を占めている。(図７)

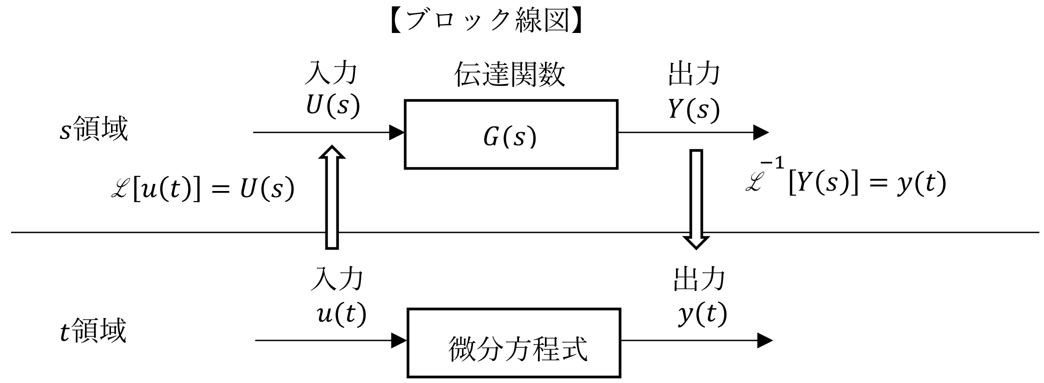


図７　ラプラス変換による応答解析

通常、制御工学が対象とするのは、多くの部品の挙動が複雑に関係するシステムであり、それは連動した複数の微分方程式により表現される。一つの微分方程式であれば、入力の変化に出力がどう対応するか求めることも可能であるが、多くの微分方程式が出現するとな

れば、それを一つの式で表現するのは容易ではない。ラプラス変換はこのような複雑なシステムにおける入力⇒出力の関係を解析するものであり、かつその際に与えられた微分方程式からラプラス変換によって導かれるs領域の「伝達関数」$G(s)$の代数的な性質を調べることで、元のt領域におけるシステムの挙動の安定性についての評価を行う事ができる。
実際に、元の微分方程式から求められる伝達関数$G(s)$が分数式

$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0}$で表される（但し、$n > m$）時、$t$領域における全ての入力に対して、出力が安定する（即ち、有限の時間の範囲で、ある一定の値幅内に収束する）為の条件は、この分数式の分母の零点（これを「極」という）の実部が全てマイナスになることである。

具体的な事例を以下に示す。

元の入力$u(t)$と出力$y(t)$の関係が微分方程式　$u(t) = \frac{1}{K{\omega_n}^2}(\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{y}(t) + {\omega_n}^2 y(t))$
（但し $\zeta > 0$、$\omega_n > 0$、$K > 0$）で与えられるとき、これをラプラス変換(但し、全ての初期値は 0 とする)すると　$U(s) = \frac{1}{K{\omega_n}^2}\left(s^2 Y(s) + 2\zeta\omega_n s Y(s) + {\omega_n}^2 Y(s)\right)$　となる。

これから伝達関数$G(s)$を求めると$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}$となり、これは極が
$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$　の「安定した」2 次遅れ系のシステムとなる。
この時入力$u(t)$がステップ変化であるとすると、これをラプラス変換した$U(s) = \frac{1}{s}$　より、
出力$Y(s)$は　$Y(s) = U(s) \cdot G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{K{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}$、従って$t$領域における出力$y(t)$は
この式の右辺を部分分数分解した$\frac{1}{s} \cdot \frac{K{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2} = K(\frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s-\alpha} + \frac{k_3}{s-\beta})$を用いて

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)] = \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s} \cdot \frac{K{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}] = \mathscr{L}^{-1}\left[K(\frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s-\alpha} + \frac{k_3}{s-\beta})\right] = K(k_1 + k_2 e^{\alpha t} + k_3 e^{\beta t})$$

として求められる。

特に$0 < \zeta < 1$の場合は「不足減衰」」と呼ばれ、この場合の単位ステップ応答$y(t)$は次のようになる。（図８）

単位ステップ応答$y(t) = K\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \varphi\right)\right\}$

$\varphi = tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

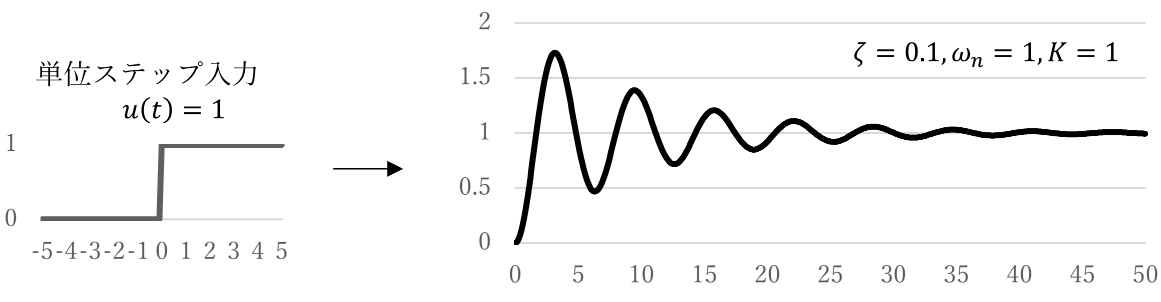


図８　安定しているシステムにおける単位ステップ応答

尚、このラプラス変換における「双対性」については、実際の講義が４年次であることもあり、１年次「情報・電子基礎数理」の授業では「部分分数分解」の手法や「数の体系」の中で「複素数の範囲で、全ての代数方程式は必ず解を持つ（代数学の基本定理）」を説明する時に合わせて、「制御系の事例紹介」として行っている。

６．最後に

本稿では特に「電気・電子・情報系」の初学者が、その学修において必要とされる数学に関して、「双対性」の概念を用いてどのようにその理解を深めることが可能かについて、実際の筆者の授業時における工夫点を示しながら考察を行った。

この工夫に対する効果を正確に測る為には、本来はこの「双対性」の概念を用いない、通常の「天下り的」な定義を行った場合との比較をする必要があるが、それを実施するのは困難な為、代わりに筆者の担当している授業のうち、本稿で述べた「情報・電子基礎数理Ⅰ」「情報・電子基礎数理Ⅱ」「電気回路Ⅰ」「電気回路Ⅱ」「制御工学」の令和元年から令和４年までの、授業アンケートにおける「授業理解度」の評価を示す。（図９）

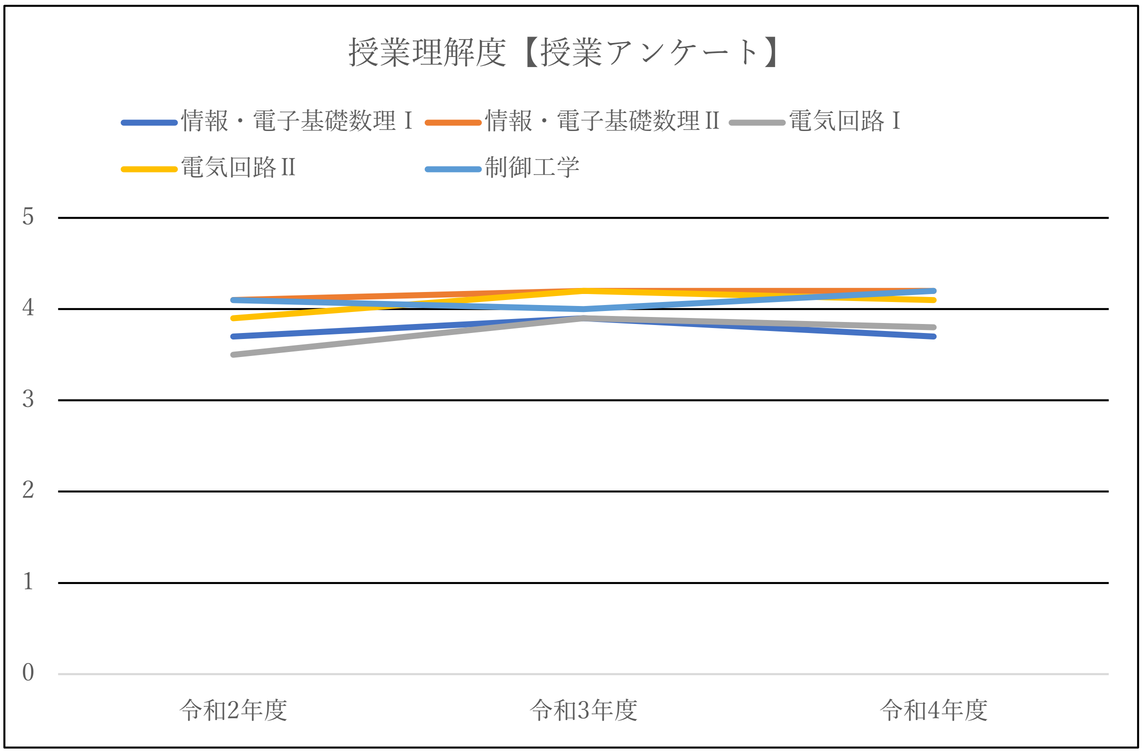


図９　筆者の担当している科目の「授業理解度」の推移

授業実施年においてばらつきはあるものの、概ね目安とされる「評価４」に近い値が出ており、授業を聞いている学生が内容を理解してもらっていると考えられる。

最初に述べたように、電気・電子・情報系の学問においては、「扱う対象が目に見えない」ことから、それを可視化する「数学」は、いわば唯一頼りにできるツールであり、単なる教養や知識というものではない。

かつ現在、かつてとは異なり、専門の内容は 1 年次から学ぶものがかなり多くなってきており、従ってそこで登場するツールは 1 年の初期に用意しておく必要が出てきているが、一方で「ツール」である以上、その使い方は「具体例を挙げながら」、でなければ、実感として理解はできないと思われる。

しかし見たように「より簡易な計算で現象を解析する」という目的から、様々な「変換」により、元の空間における「理解しやすい表現」ではなく、別の空間における「理解しにくい」表現で、その対象が表現されている場合は多い。

従ってこれを「双対性」という概念で括って、「表現は異なっているが、移った先での処置が、元の空間における処置に正確に反映されている、という認識を持たせることは大切であると思われる。

註

[1]電気学会通信教育会「電気学会大学講座　電気回路論　改訂版」電気学会,pp.338-348,1984 年 2 月

[2] 室田和夫「双対原理から双対技術へ」,横断型基幹科学技術研究団体連合第 1 巻第 1 号,2007 年

[3] 森武明・大矢征「電気電子工学のための基礎数学　第 2 版」森北出版株式会社,pp.60-61,2017 年 3 月

参考文献

[1]高木亀一「大学課程　応用数学（改訂 2 版）」オーム社,2000 年

[2]後藤尚久「なっとくする電気数学」講談社，2002 年 11 月

[3]西巻正郎・森武明・荒井俊彦「電気回路の基礎（第 3 版）」森北出版,2020 年 2 月

[4]服籐憲司「例題と演習で学ぶ　続・電気回路（第 2 版）」森北出版株式会社,2017 年 11 月

[5]佐藤敏明「図解雑学　フーリエ変換」ナツメ社,2011 年 8 月

[6]佐藤和也・平元和彦・平田研二「はじめての制御工学（改訂第 2 版）」2021 年 7 月

ブール代数演算に基づく
数学における論理の理解支援

第一工科大学　工学部　情報電子システム工学科　　渋沢 良太

要旨

情報技術の発展と社会への普及に伴い，現在日本国内の高等学校においても，情報が教科として必修化されている．情報学において，ブール代数の演算は重要な基礎であり，高等学校の情報 I でもブール代数 $\{0,1\}$ 上の演算が学習内容として含められている．ブール代数 $\{0,1\}$ 上の演算は数学において一般的に使われている論理の意味に対応づけられる．そのためブール代数の演算を修得した学習者にとっては，それを基に考察することで，数学における論理も理解しやすくなると考えられる．本研究ではブール代数演算に基づいて，高校生等の論理の初学習者が，数学において一般的に使われている論理を理解することを支援する方法を提案する．

1. はじめに

日本国内において 2023 年現在，数学の論理は，数学 I の中で集合とともに教えられている．集合と論理は，数学全般に渡って基本的な役割を果たしており，数学の理解に不可欠な存在である．高等学校の数学において，論理については，命題の真偽，命題の必要条件と十分条件，命題の逆，裏，対偶等が教えられている．高等学校において教えられている論理は，数学全般において一般的に使われている論理，すなわち数理論理学におけるメタ的に使われている論理である．そしてこの論理の意味は，数理論理学における古典命題論理の意味論における意味と対応している．

一方，高等学校の情報の授業においては，情報 I の中でコンピュータの仕組みとともに，$\wedge, \vee, \neg$ といった $\{0,1\}$ 上の演算が教えられている．この演算は，排中律が常に成り立つハイティング代数，すなわちブール代数における演算であり，古典論理の意味論に対応する．そのため，情報 I のブール代数演算と，数学 I の論理は強く関連しており，両者を対応づけて教える方が，学習者の理解が深まると考えられる．

このような背景を踏まえ，本研究では高校生や数学の初学者である大学生を対象として，数学全般において一般的に使われている論理の意味を，情報 I で学習するブール代数演算を基にして教える方法を提案する．理論が生み出された順序としてはブール代数演算の方が後であるが，情報教育が行われるようになった現代では，ブール代数演算を基にした方が学習者にとって理解しやすいと考えられる．なお，数理論理学では数学における論理を形式化し，構文論と意味論を分けて体系的に理論がまとめられており，論理を厳密に学ぶためには数理論理学を学ぶのが望ましい．しかしそれを理解するためにも，数理論理学でメタに使われている，数学全般で一般的に使われている論理をまず修得する必要がある．

本研究に関して，筆者が学生の頃に静岡県立大学名誉教授の鈴木直義先生から熱心なご指導を賜った．ここに深く感謝の意を表する．

2. ブール代数演算と論理記号の意味の対応

2.1. 基本的な論理式の意味

ブール代数の演算には，単項演算子 $\neg$ と，2 項演算子 $\wedge$ および $\vee$ がある．一般的なブール代数では，その台集合は $\{0,1\}$ に限定されず，$\{0,1\}$ を部分集合として含み，$\wedge, \vee, \neg$ についてブール束をなすものであれば何でも良いが，本論文では高等学校の情報 I で教えられているブール代数と同じく，台集合は必ず $\{0,1\}$ とする．この場合，$\wedge$ は AND，$\vee$ は OR，$\neg$ は NOT とも呼ばれる．

$\neg$ は 0 または 1 を，0 または 1 に対応付ける関数とみなせる．また，$\wedge, \vee$ は，0 または 1 の 2 つの組を，0 または 1 に対応付ける関数とみなせる．すなわち，p と q を 0 または 1 のいずれかの値をとる変数とすると，$\neg$ は p を $\neg p$ に対応付ける関数，$\wedge$ は p と q の組 (p, q) を $p \wedge q$ に対応付ける関数，$\vee$ は (p, q) を $p \vee q$ に対応付ける関数である．$\neg$ の真理値表を表 1 に，$\wedge$ と $\vee$ の真理値表を表 2 に示す．論理回路の観点からは，p,q は入力ビット，$\neg p, p \wedge q, p \vee q$ は出力ビットと考えることができる．

表 1: $\neg$ の真理値表

p	$\neg p$ $(NOT\ p)$
0	1
1	0

表 2: $\wedge$ と $\vee$ の真理値表

p	q	$p \wedge q$ $(p\ AND\ q)$	$p \vee q$ $(p\ OR\ q)$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

数学では，真または偽のいずれか一方に定まる文を命題という．数理論理学においては，命題論理式と述語論理式を分けて考えるが，本論文では真または偽のいずれか一方に定まる文は全て命題という．そして表 1, 表 2 の真理値表において，p, q を命題を表す変数とし，0 を命題が偽であることに，1 は命題が真であることに対応させることで，このブール代数上での演算を古典命題論理の意味に対応させることができる．数学において「p でない」という文が真であることは，$\neg p$ が真である，すなわち p が偽であることを意味する．例えば，命題 p を「$\sqrt{2}$ は有理数」とすると，$\neg p$ は真，すなわち「$\sqrt{2}$ は有理数でない」が真となり,「$\sqrt{2}$ は有理数」は偽となる．同様に,「p または q」という文が真であることは，$p \vee q$ が真，すなわち p が真または q が真であることを意味する．この時，真理値表から明らかなように，p と q が両方とも真である場合も,「p または q」という文は真である．命題 p を「7 は偶数」，命題 q を「8 は偶数」とした時,「8 は偶数」が真であるため，$p \vee q$，すなわち「7 は偶数または 8 は偶数」は真になる．そして,「p かつ q」という文が真であることは，$p \wedge q$ が真，すな

わち p が真かつ q が真であることを意味する．命題 p を「7 は素数」，命題 q を「7 は奇数」とした時,「7 は素数」は真,「7 は奇数」は真であるため，$p \wedge q$，すなわち「7 は素数かつ 7 は奇数」は真となる．

$p \Rightarrow q$ は，$\neg(p \wedge \neg q)$ の省略形である．次の節で述べる通り，$p \Rightarrow q$ は $\neg p \vee q$ の省略形であるとも考えることができる．「p ならば q」という文が真であることは，$p \Rightarrow q$ が真である，すなわち「p かつ q でないことはない」という文が真であることを意味する．$p \Rightarrow q$ の真理値表を表 3 に示す．例えば，命題 p を「2 つの三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の 3 組の辺の長さが等しい」とし，命題 q を「$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は合同」とすると，$p \wedge \neg q$ は偽であり，したがって $\neg(p \wedge \neg q)$，すなわち $p \Rightarrow q$ は真となる．数学では，公理という命題が真であるとし，公理が真であるならば定理が真であることを示し，またその定理が真であるならばさらに別の定理が真であるといったように，公理から定理を導くことで理論体系を構築する．このことについての初学者向けの理解支援については，筆者の先行研究でまとめている [3, 4, 5].

表 3: $p \Rightarrow q$ の真理値表

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \Rightarrow q$ $(\neg(p \wedge \neg q))$	$\neg p$	$p \Rightarrow q$ $(\neg p \vee q)$
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1

2.2. トートロジー

α を命題を表す変数とする．ここで，$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ といった論理記号を含む文も命題である．数理論理学では通常，命題変数と命題論理式を表す変数を分けて考えるが，この α は，数理論理学における命題論理式を表す変数に該当する．論理記号を含まない 2.1. で述べた p, q 等の命題を原子命題という．命題 α に含まれる全ての原子命題について，その真偽がどのような場合であっても，α が真である時，α をトートロジーという．例えば，$p \vee \neg p$ や，$\neg\neg p \Rightarrow p$ がトートロジーであることが，表 4 から分かる．表 4 では，p が偽，真のいずれの場合であっても，$p \vee \neg p$ と，$\neg\neg p \Rightarrow p$ は真になることが，表の 3 列目と最も右の列から読み取れる．このように数学において一般的に使われている論理では，これらはトートロジーになる．しかし，数理論理学における直観主義論理や中間論理のいくつかにおいては，これらはトートロジーにはならないことには注意が必要である．$p \vee \neg p$ は排中律，$\neg\neg p \Rightarrow p$ は二重否定の除去と呼ばれる．

表 4: $p \vee \neg p, \neg\neg p \Rightarrow p$ の真理値表

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg p \wedge \neg p$	$\neg(\neg\neg p \wedge \neg p)$ $(\neg\neg p \Rightarrow p)$
0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1

同様に，$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$，すなわち $\neg(p \wedge \neg(\neg(q \wedge \neg p)))$ がトートロジーであることが，表5から分かる．p, q の真偽がどのような場合であっても，$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ は常に真になることが表の最も右の列から確かめられる．

表 5: $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ の真理値表

p	q	$\neg p$	$q \wedge \neg p$	$\neg(\neg(q \wedge \neg p))$	$p \wedge \neg(\neg(q \wedge \neg p))$	$\neg(p \wedge \neg(\neg(q \wedge \neg p)))$ $(p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$
0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1

2.3. 論理的同値

α, β を命題を表す変数とする．$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$ がトートロジーである時，α と β は論理的同値であるという．α と β が論理的同値であるということは，すなわち，α と β の真偽値が常に一致し，α が真ならば β が真であり，β が真ならば α が真，α が偽ならば β は偽，β が偽ならば α が偽になることである．

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ は，$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$ の省略形である．p と $\neg\neg p$, $\neg(p \wedge q)$ と $\neg p \vee \neg q$, $\neg(p \vee q)$ と $\neg p \wedge \neg q$ 等が論理的同値である．

表 6: p と $\neg\neg p$ は論理的同値

p	$\neg p$	$\neg\neg\neg p$	$p \wedge \neg\neg\neg p$	$\neg(p \wedge \neg\neg\neg p)$ $(p \Rightarrow \neg\neg p)$	$\neg(\neg\neg p \wedge \neg p)$ $(\neg\neg p \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow \neg\neg p$
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1

表 7: $\neg(p \wedge q)$ と $\neg p \vee \neg q$ は論理的同値

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

表 8: $\neg(p \vee q)$ と $\neg p \wedge \neg q$ は論理的同値

p	q	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

表 9 から，$\neg(p \land \neg q)$ と $\neg p \lor q$ が論理的同値であることが分かる．よって，$p \Rightarrow q$ は，$\neg p \lor q$ の省略形と考えることもできる．

表 9: $\neg(p \land \neg q)$ と $\neg p \lor q$ は論理的同値

p	q	$\neg p$	$\neg p \lor q$	$\neg(p \land \neg q)$	$\neg p \lor q \Leftrightarrow \neg(p \land \neg q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

$p \Rightarrow q$ という命題に対し，$\neg q \Rightarrow \neg p$ を対偶，$q \Rightarrow p$ を逆，$\neg p \Rightarrow \neg q$ を裏という．元の命題と対偶は論理的同値，逆と裏は論理的同値となる．元の命題の逆の対偶は，元の命題の裏であり，命題と対偶が表 10 の通り論理的同値であることが示せるため，逆と裏は論理的同値となる．

表 10: $p \Rightarrow q$ と $\neg q \Rightarrow \neg p$ は論理的同値

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$ $(\neg p \lor q)$	$\neg q \Rightarrow \neg p$ $(q \lor \neg p)$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

しかし，命題とその逆は論理的同値でなく，ある命題が真であるからといって，その逆は表 11 の最も右側の列の通り必ずしも真にならない．この点は初学者に良く見受けられる間違いである．例えば，実数上の関数 f について，「$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能」$\Rightarrow$「$f(x)$ は $x = 0$ で連続」は真になるが，「$f(x)$ は $x = 0$ で連続」$\Rightarrow$「$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能」は必ずしも真にならない．図 1 に，$x = 0$ で連続であるが，$x = 0$ で微分可能でない関数のグラフを示す．この関数は，$(-\infty, 0]$ で $y = -x$，$(0, \infty)$ で $y = x$ となる．$x = 0$ において，左極限と右極限は共に 0 で一致するため連続であるが，左微分係数は-1，右微分係数は 1 で一致せず微分可能でない．

表 11: $p \Rightarrow q$ と $q \Rightarrow p$ は論理的同値でない

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$ $(\neg p \lor q)$	$q \Rightarrow p$ $(\neg q \lor p)$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1

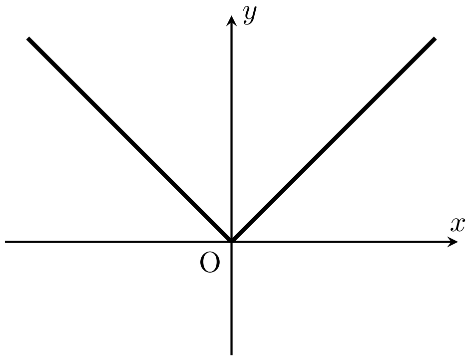


図 1: $x = 0$ で連続であるが微分可能でない関数の例

また，p, q, r を命題を表すと変数とする時，$p \wedge (q \vee r)$ は，$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ と論理的同値，$p \vee (q \wedge r)$ は,$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ と論理的同値になる．

表 12: $p \wedge (q \vee r)$ と $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ は論理的同値

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

表 13: $p \vee (q \wedge r)$ と $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ は論理的同値

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

他にも論理的同値な例としては，p と p，$p \vee q$ と $q \vee p$，$p \wedge q$ と $q \wedge p$，p と $p \vee p$，p と $p \wedge p$，$(p \vee q) \vee r$ と $p \vee (q \vee r)$，$(p \wedge q) \wedge r$ と $p \wedge (q \wedge r)$, p と $p \vee (p \wedge q)$, p と $p \wedge (p \vee q)$ 等がある．

論理的同値は数学において非常に重要な概念である．α と β が論理的同値である時，それらの真偽は常に一致するため，ある公理系のもとで α が成立する時，β を含む α と論理的同値な命題全てが同じ公理系のもとで成立することになる．例えば，ユークリッド幾何

学において，2 つの三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ について,「$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ が合同である」という命題は,「$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の三組の辺の長さがそれぞれ等しい」と論理的同値であるが,「$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の 2 組の辺の長さとその間の角が等しい」とも論理的同値であり,「$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の 1 組の辺の長さとその両端の角が等しい」とも論理的同値である．従って 2 つの三角形について，合同条件のいずれか一つが成立すれば，合同条件の全てが成立する．よって，2 つの三角形が合同かそうでないかを判定するためには，合同条件の一つのみについてその真偽が分かれば良いことになる．

また，$\alpha \Rightarrow \beta$ が真であることを証明する際に，この対偶，すなわち $\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$ が真であることを証明できれば，対偶と元の命題は論理的同値であるため，元の命題が真であることを証明できる．$\alpha \Rightarrow \beta$ が真であることを証明するのが難しい場合，このように対偶等の元の命題と同値な命題が真であることを証明することによって元の命題が真であることを証明可能である．

3. 証明における論理

3.1. 存在と全称

数学では一般的に，ある集合の元についての命題を扱う．集合の元についての命題には大きく 2 種類あり,「命題を真にする集合の元が少なくとも一つ存在する」というものと,「集合の全ての元について命題が真になる」というものがある．また両者を組み合わせたり,「かつ」,「または」,「ならば」,「でない」と組み合わせる場合もある.「全ての」は「任意の」という言葉で表されることも多い．これらは次のように解釈できる.「全ての整数 a について，$a+0=0+a=a$」という文は，a にどの整数を代入しても，$a+0=0+a=a$ が成立する時かつその時に限り真となる命題である.「全ての整数 a について，$a+b=b+a=0$ となる整数 b が存在する.」という文は，a にどの整数を代入しても，$a+b=b+a=0$ となる整数 b が存在する時かつその時に限り真となる命題である．

このように，集合 S の元を表す x を含む文 $\alpha(x)$ に対して,「$\alpha(x)$ となる x が存在する」という文は，$\alpha(x)$ の x に S の少なくとも一つのある元を代入した時に，命題 $\alpha(x)$ が真になる時かつその時に限り真になる命題である．また,「任意の x について $\alpha(x)$」という文は，$\alpha(x)$ の x に S のどの元を代入した時も，命題 $\alpha(x)$ が真になる時かつその時に限り真になる命題である．従って「$\alpha(x)$ となる x が存在する」が偽になるのは，$\alpha(x)$ の x に S のどの元を代入した時も，$\alpha(x)$ が偽になる時かつその時のみである.「任意の x について $\alpha(x)$」が偽となるのは，$\alpha(x)$ の x に S の少なくとも一つのある元を代入した時に，$\alpha(x)$ が偽になる時かつその時のみである．

3.2. 背理法

数学において定理を証明する際，背理法と数学的帰納法が良く使われている.「α ならば β」を証明する時に，背理法ではまず α が真，β が偽，すなわち $\neg\beta$ が真であると仮定する．そしてこの時，β が真であること，または α が偽であることを示す．β が真であることを示せた場合，$(\alpha \wedge \neg\beta) \Rightarrow \beta$ が真であることが示され，$(\alpha \wedge \neg\beta) \Rightarrow \beta$ は $\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \vee \beta$ の省略形であるため，$\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \vee \beta$ と論理的同値であり，これはまた $\neg\alpha \vee \beta$ すなわち $\alpha \Rightarrow \beta$ と論理的

同値であり，$\alpha \Rightarrow \beta$が示せたことになる (表14)．同様にαが真，βが偽と仮定して，αが偽であることを示せた場合，$(\alpha \wedge \neg\beta) \Rightarrow \neg\alpha$が真であることが示され，これは$\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \vee \neg\alpha$と論理的同値であり，これはまた$\neg\alpha \vee \beta$すなわち$\alpha \Rightarrow \beta$と論理的同値である (表15).

表 14: $((\alpha \wedge \neg\beta) \Rightarrow \beta)$と$\alpha \Rightarrow \beta$は論理的同値

α	β	$\neg\beta$	$\alpha \wedge \neg\beta$	$\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$	$\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \vee \beta$ $((\alpha \wedge \neg\beta) \Rightarrow \beta)$	$\neg\alpha$	$\neg\alpha \vee \beta$ $(\alpha \Rightarrow \beta)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1

表 15: $((\alpha \wedge \neg\beta) \Rightarrow \neg\alpha)$と$\alpha \Rightarrow \beta$は論理的同値

α	β	$\neg\alpha$	$\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \vee \neg\alpha$ $((\alpha \wedge \neg\beta) \Rightarrow \neg\alpha)$	$\neg\alpha \vee \beta$ $(\alpha \Rightarrow \beta)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

また，βを証明する際，αを公理とし,「αならばβ」の証明と考える．そして上記と同様にαが真，βが偽と仮定して，$(\alpha \wedge \neg\beta) \Rightarrow \beta$が真であること，または$(\alpha \wedge \neg\beta) \Rightarrow \neg\alpha$が真であることを示すことによって，公理のもとで$\beta$が真になることを示せる．

例として，βを「素数は無限個存在する」としてこれを証明する時，$\neg\beta$，すなわち「素数は無限個は存在しない」を仮定する．2,3 等は素数であるから，素数が全く存在しないことはなく，素数は有限個存在することになる．$p_1, p_2, ..., p_n$をそれら有限個の素数全てとする．$p = p_1 \times p_2 \times ... \times p_n + 1$とおくと，素因数分解の一意性より，$p$はいずれかの素数で割り切れるが，$p$は$p_1, p_2, ..., p_n$のいずれでも割り切れない．従って，$p$は$p_1, p_2, ..., p_n$のいずれとも異なる素数である．よって，$\neg\beta$が偽，すなわち$\beta$が真となる．よって公理を$\alpha$とする時，$\alpha \wedge \neg\beta \Rightarrow \beta$が真，すなわちそれと同値な$\alpha \Rightarrow \beta$が真となる．

3.3. 数学的帰納法

自然数を表す変数nを含む文について，nに任意の自然数を代入して得られる命題が全て真であることを示す際に，数学的帰納法が使われる．数学的帰納法では,

1. nに1を代入して得られる命題が真である
2. 任意の自然数mについて，それをnに代入して得られる命題が真であるならば，$m+1$をnに代入して得られる命題も真である

ことの2つを示すことで，nに任意の自然数を代入して得られる命題が全て真であることを示す.

数学的帰納法は，表16の真理値表によって理解できる．自然数を表す変数nを含む文について，nに1を代入して得られる命題をp_1，nに2を代入して得られる命題をp_2とする．$0 \in \mathbb{N}$とするならば，nに0を代入して得られる命題をp_1とする．同様に自然数mをnに代入して得られる命題をp_mとする．表から，p_1が真で，$p_1 \Rightarrow p_2$が真ならば，p_2が真になることが分かる．よって，p_1が真であることを示し，任意の自然数mについて$p_m \Rightarrow p_{m+1}$が真であることを示せれば，p_1が真，$p_1 \Rightarrow p_2$よりp_2が真，$p_2 \Rightarrow p_3$よりp_3が真というように，任意の自然数についてp_nが真であることを示せる．

表 16: $(p_1 \wedge (p_1 \Rightarrow p_2)) \Rightarrow p_2$の真理値表

p_1	p_2	$p_1 \Rightarrow p_2$	$p_1 \wedge (p_1 \Rightarrow p_2)$	$(p_1 \wedge (p_1 \Rightarrow p_2)) \Rightarrow p_2$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

例えば,「任意の自然数nについて，1からnまでの全ての自然数の和$1+2+3+\ldots+n$は，$\frac{n(n+1)}{2}$に等しい」という主張を数学的帰納法で証明すると，$n=1$の時，$\frac{1\times(1+1)}{2}=1$であり，主張は成立する．任意の自然数mについて，$1+2+\ldots+m=\frac{m(m+1)}{2}$が成立するとする．この時，1から$m+1$までの全ての自然数の和は,

$$\begin{aligned}1+2+\ldots+m+(m+1)=\frac{m(m+1)}{2}+(m+1) &= \frac{m(m+1)+2(m+1)}{2}\\ &= \frac{(m+1)(m+2)}{2}\end{aligned}$$

となり，任意の自然数mについて，$1+2+\ldots+m=\frac{m(m+1)}{2}$ならば，$1+2+\ldots+m+(m+1)=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$が成立する．よって，任意の自然数$n$について，

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

が成立する．

ここで数学的帰納法では，任意の$\mathbb{N}$の元について命題が成立することを証明するとしたが，実際は自然数には限定されない．任意の整礎な2項関係$\prec$が定義された集合，すなわち集合$(S,\prec)$の任意の空でない部分集合Mについて，Mの極小元がMに存在するような集合の全ての元について命題が成立することを証明する際に，数学的帰納法は用いることができる．$\mathbb{N}$は整列集合であり，整礎な順序集合の一つである．2つの集合の直積が整礎である時，その元についての命題の証明に用いる数学的帰納法は，二重帰納法と呼ばれる．

3.4. 複数の命題の推移

表17の通り，$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$はトートロジーとなる．従って，$p \Rightarrow q$が真で，$q \Rightarrow r$が真であるならば，$p \Rightarrow r$は真となる．

数学において，αとβが論理的同値であることを証明する際，$\alpha \Rightarrow \beta$が真であることと，$\beta \Rightarrow \alpha$が真であることの両方を示せば良い．この時，$\alpha \Rightarrow \beta$が真であることは示せるが,

$\beta \Rightarrow \alpha$が真であることを示すのが難しい場合がある．このような場合に，もう一つ別の命題γに対して，$\beta \Rightarrow \gamma$が真であることと，$\gamma \Rightarrow \alpha$が真であることを示すことによって，表17のように$\beta \Rightarrow \alpha$が真であることを示すことができる．このように，$\alpha$と$\beta$が同値であることを証明する際，$\alpha, \beta, \gamma$が同値であることを証明することで，$\alpha$と$\beta$が同値であることを証明することもできる．この例では直接証明したい命題の他に，1つだけ命題を追加したが，2つ以上の命題を追加して証明する方法もある．

表 17: $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$の真理値表

p	q	r	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

4. おわりに

データベース，ネットワーク，コンピュータグラフィックス，機械学習等，情報技術の多くは，代数学，解析学，幾何学等の数学の理論を基盤としている．そのため，高等学校において数学，情報のそれぞれの授業で教えられていることは，強く関連していることが多い．学習者が数学の授業で学んだ知識を情報の授業で活かすことはもちろんであるが，その反対，すなわち情報の授業で学習者が修得した知識を，数学の授業に活かすことも考えられ，本研究ではこの方法による理解支援を提案した．特に，論理的同値，背理法，数学的帰納法について学習者が真理値表をもとに理解できるようにする方法を提案した．

今後，本研究で提案した方法を大学授業で実践し，フィードバックを得て継続的に指導方法を改善していく．

参考文献

[1] 文部科学省, 2018 年, 【数学編 理数編】高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）.

[2] 文部科学省, 2018 年, 【情報編】高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）.

[3] 渋沢良太, 2023 年, 距離関数と円のグラフによる公理及び公理を満たす異なる対象の存在の理解支援, 第一工科大学教職課程研究紀要, Vol.7, pp.2-13.

[4] 渋沢良太, 2023 年, 数学の証明を基にした研究活動の発想支援-高等学校における総合的な探究の時間での実践, 第一工科大学研究報告, Vol.35, pp.23-31.

[5] 渋沢良太, 2023 年, 距離関数と円のグラフを題材とした公理と演繹の理解支援, 数学教育学会 2023 年度春季年会予稿集, pp.8-10.

[6] 小田切忠人, 1979 年, 高等学校数学の「集合と論理」-真理表の教材化について-, 琉球大学教育学部紀要 第二部 (23), pp.11-24.

[7] 山田俊夫, 1971 年, 高等学校における「集合と論理」の指導について, 日本数学教育学会誌 53 巻 9 号, pp.10-19.

「同じ」という概念は全て同じか？

第一工科大学　工学部　情報電子システム工学科　　渋沢 良太

要旨

「同じ」という概念は，科学における思考の基礎を成し，実験や観察結果の比較，科学の対象の比較や分類などに利用される．数学において,「同じ」という概念は同値関係であり，同値関係についての理解を深め，異なる様々な「同じ」という概念を理解することは，科学的な考察の能力を養うことに繋がると考えられる．本研究では，高校生や入学したばかりの大学生など，数学を専門としない大学数学の初学者を対象として,「同じ」という概念を，同値関係と「似ている」という概念との比較，同値関係上の同値関係を通して理解を深めることを支援する方法を提案する．

1. はじめに

「A と B で同じ結果が得られた.」,「A と B は同じように変化する.」等の文が学術論文で良く見られるように，科学において「同じ」という概念は重要な基礎を成している．特にその概念は，実験や観察結果の比較，対象の分類をする際に良く使われている．また,「異なる」という概念は,「同じ」ではないということを意味しており，この概念も科学において良く使われている．このように異なる様々な分野で,「同じ」という概念が使われるが，これらは全て同じだろうか？また，異なるとしたら，どのように異なるのであろうか？

同様に,「A と B は似た性質を持つ」,「A と B は似た構造を持つ」等,「同じ」に近い意味で,「似ている」という概念も学術論文で多く見られる.「同じ」と「似ている」は具体的にどのような違いがあるのだろうか？

数学において,「同じ」という概念は同値関係のことを意味する．日本の中学校の数学では，ユークリッド幾何学において，2 つの三角形の相似，合同について学習する．相似という用語からは「似ている」という意味を，合同という用語は「同じ」という意味を連想しがちであるが，どちらも同値関係であり,「同じ」という概念である．他にも数学では，論理的同値，集合の元の相等，集合の相等，集合の同型，群や環の同型，圏同型や圏同値など，異なる様々な「同じ」という概念が存在するが，これらは全て同値関係である．この同値関係に基づいて考察することで，上記の問いについて一つの明確な答えを提示できる．本研究では，数学を必ずしも専門としない大学生，高校生を対象とし,「同じ」と「似ている」との違いを，数学における関係に基づいて考察させることで,「同じ」という概念についての理解を深める方法を提案する．これにより，自然科学，社会科学の両分野において，学生が科学的な考察力を養うことを目的とする．

本研究に関して，筆者が学生の頃に静岡県立大学名誉教授の鈴木直義先生から熱心なご指導を賜った．ここに深く感謝の意を表する．

2. 関係，順序関係，同値関係

2.1. 関係と順序関係

まず，関係の定義を確認する．

定義 1 (2項関係)

Sを集合とする．S上の2項関係とは，$S \times S$から$\{0,1\}$への写像である．

同様にS上のn項関係とは，Sのn個の直積から$\{0,1\}$への写像のことを表す．S上の2項関係$\sim$に対して，$a \sim b = 1$であることを，$a \sim b$と表記する．

S上の2項関係$\sim$に対して，$R = \{(a,b) \in S \times S \mid a \sim b\}$という$S \times S$の部分集合が定まり，この対応によって$S$上の2項関係と$S \times S$の部分集合は1対1に対応する．そのため，$S$上の2項関係は$S \times S$の部分集合と同一視される．以降，$S$上の2項関係$\sim$に対応する$S \times S$の部分集合を$R_\sim$と表記する．

次に，擬順序(前順序)，半順序，全順序の定義を確認する．

定義 2 (擬順序(前順序))

Sを集合とする．S上の2項関係$\preceq$が，Sの任意の元a, b, cに対して，次の2つの条件を満たすときかつその時に限り，$\preceq$を擬順序(pseudo-order/quasi-order)または前順序(pre-order)という．

1. $a \preceq a$　(反射律)
2. $a \preceq b$かつ$b \preceq c$ならば，$a \preceq c$　(推移律)

定義 3 (半順序)

S上の擬順序$\preceq$が，Sの任意の元a, bに対して，次の条件を満たすときかつその時に限り，$\preceq$を半順序(partial order)，または単に順序という．

3. $a \preceq b$かつ$b \preceq a$ならば$a = b$　(反対称律)

なお，この定義における$a = b$は，aとbが集合Sの元として等しいことを表す．

定義 4 (全順序)

S上の半順序$\preceq$が，Sの任意の元a, bに対して，$a \preceq b$または$b \preceq a$が成立する時，かつその時に限り$\preceq$を全順序(total order)という．

擬順序が最も条件が弱く，擬順序，半順序，全順序の順に条件が強くなるため，全順序は必ず半順序でも擬順序でもある．また，半順序は必ずしも全順序ではないが，必ず擬順序でもある．

高等学校までの数学において標準的に使われる実数の大小を比較する不等号$\leq$は，$\mathbb{R}$上の全順序である．また，集合Sの冪集合$\mathfrak{P}(S)$上の包含関係$\subseteq$は，半順序であるが全順序ではない．例えば，互い素である集合AとBにおいて，$A \subseteq B$も$B \subseteq A$も成立しない．

S を $[0, 2\pi]$ を定義域とする実数値関数の全体からなる集合とする．S の任意の 2 つの元, f, g に対して,

$$f \preceq g \Leftrightarrow max(f) \leq max(g)$$

と 2 項関係を定めると，$\preceq$ は S 上の擬順序となる．ここで，$max(f)$ は，$f([0, 2\pi])$ の最大値を表すものとする．また，$\leq$ は $\mathbb{R}$ 上の大小を比較する通常の不等号である．実際，S の任意の元 f, g, h について，$max(f) \leq max(f)$ より，$f \preceq f$．$max(f) \leq max(g)$ かつ $max(g) \leq max(h)$ ならば，$max(f) \leq max(h)$ より，$f \preceq g$ かつ $g \preceq h$ ならば $f \preceq h$ である．しかし，$sin, cos \in S$ で，$max(sin) = max(cos) = 1$ より，$sin \preceq cos$ かつ $cos \preceq sin$ であるが，$sin \neq cos$ より，反対称律は満たさない．したがって，この $\preceq$ は擬順序である．

$\{0, 1, 2\}$ 上の擬順序, 半順序, 全順序の例を表1に示す．擬順序, 半順序, 全順序のいずれも, 反射律を満たすため，$(0, 0), (1, 1), (2, 2)$ を含む．$(0, 1), (1, 0) \in R_{\preceq_1}$ であるが，$0 \neq 1$ であり, 反対称律を満たさないため，半順序でも全順序でもなく，擬順序である．$(0, 2), (2, 0) \notin R_{\preceq_4}$ より，$R_{\preceq_4}$ は全順序ではない．しかし，反射律，反対称律，推移律を満たすため，半順序である．$R_{\preceq_7}, R_{\preceq_8}, R_{\preceq_9}$ は，反射律，反対称律，推移律を満たす．また，$\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ の任意の元 (a, b) に対して，$(a, b) \in R_{\preceq_x}$ または $(b, a) \in R_{\preceq_x}$ が，$R_{\preceq_7}, R_{\preceq_8}, R_{\preceq_9}$ で成立するため，これらは全順序である．自然数の全体 $\mathbb{N}$ 上の通常の不等号は $\{0, 1, 2\}$ 上では $R_{\preceq_7}$ と等しくなるが，$\{0, 1, 2\}$ 上の全順序はそれだけでなく，$R_{\preceq_8}, R_{\preceq_9}$ のような全順序も存在する．

表 1: $\{0, 1, 2\}$ 上の擬順序，半順序，全順序の例

順序	集合
擬順序 $R_{\preceq_1}$	$\{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (1,0)\}$
擬順序 $R_{\preceq_2}$	$\{(0,0), (1,1), (2,2), (0,2), (2,0)\}$
擬順序 $R_{\preceq_3}$	$\{(0,0), (1,1), (2,2), (1,2), (2,1)\}$
半順序 $R_{\preceq_4}$	$\{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1)\}$
半順序 $R_{\preceq_5}$	$\{(0,0), (1,1), (2,2), (0,2)\}$
半順序 $R_{\preceq_6}$	$\{(0,0), (1,1), (2,2), (1,2)\}$
全順序 $R_{\preceq_7}$	$\{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (0,2), (1,2)\}$
全順序 $R_{\preceq_8}$	$\{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (0,2), (2,1)\}$
全順序 $R_{\preceq_9}$	$\{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (2,0), (2,1)\}$

2.2. 同値関係

定義 5 (同値関係)

S 上の 2 項関係 $\approx$ が，S の任意の元 a, b に対して，次の条件を満たすときかつその時に限り，$\approx$ を同値関係 (equivalence relation) という．

1. $a \approx a$　(反射律)
2. $a \approx b$ ならば $b \approx a$　(対称律)
3. $a \approx b$ かつ $b \approx c$ ならば $a \approx c$　(推移律)

数学において,「同じ」を表す概念はこの同値関係である．ある集合 S の元の相等を表す $=$ は，S 上の同値関係である．2つの複素数が等しいことを表すために標準的に使われる $=$ は，複素数全体 $\mathbb{C}$ 上の同値関係である．ある普遍集合 X の部分集合，S_1, S_2 について，

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow (S_1 \subseteq S_2 \text{かつ} S_2 \subseteq S_1)$$

すなわち S_1 の元の要素と S_2 の元の要素が全て等しい時，$S_1 = S_2$ とすると，$=$ は $\mathfrak{P}(X)$ 上の同値関係である．また，S_1 から集合 S_2 への全単射が存在する時かつその時に限り，$S_1 \cong S_2$ とすると，$\cong$ は $\mathfrak{P}(X)$ 上の同値関係となる．ここで，$=$ と $\cong$ はどちらも $\mathfrak{P}(X)$ 上の同値関係であるが，$R_= \neq R_\cong$ すなわち $\mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X)$ の部分集合としては等しくない．例えば，普遍集合を自然数の全体 $\mathbb{N}$ とする時，$S_1 = \{1, 3, 5, 7\}$ と $S_2 = \{2, 4, 6, 8\}$ について，$S_1 \neq S_2$ であるが，$S_1 \cong S_2$ である．またこの場合，$R_= \subseteq R_\cong$ が成立しており，集合の同型 $\cong$ は，$=$ よりも多くの対象を「同じ」とみなす同値関係である．

ユークリッド幾何学における三角形の相似，合同はどちらも同値関係である．合同な二つの三角形を紙で作ると，2つの三角形をぴったりと重ね合わせられることから，合同が2つの三角形が「同じ」であることを示す同値関係であることは考えやすいであろう．一方，相似については,「相似」という日本語からは「似ている」ことを表す概念のように連想されがちであるが，2つの三角形が「本質的には同じ」ことを表す概念である．2つの三角形が相似である時，一方の三角形を，3つの角度を保ったまま拡大または縮小すると，他方の三角形と合同にできる．よって相似は合同よりも多くの対象を「同じ」とみなす同値関係である．

$\{0, 1, 2\}$ 上の同値関係の例を表2に示す．同値関係は反射律を満たすため，$(0, 0), (1, 1), (2, 2)$ をいずれも含む．実数の全体 $\mathbb{R}$ 上の通常の等号 $=$ は，$\{0, 1, 2\}$ 上では $R_{\approx_1}$ と一致する．それとは異なり，$R_{\approx_2}, R_{\approx_3}, R_{\approx_4}$ はそれぞれ，$0 \approx_2 1, 0 \approx_3 2, 1 \approx_4 2$ が成立するような同値関係である．$\approx_5$ は，$\{0, 1, 2\}$ のいずれの元も全て同値であるとする同値関係である．

表 2: $\{0, 1, 2\}$ 上の同値関係の例

同値関係	集合
$R_{\approx_1}$	$\{(0,0),(1,1),(2,2)\}$
$R_{\approx_2}$	$\{(0,0),(1,1),(2,2),(0,1),(1,0)\}$
$R_{\approx_3}$	$\{(0,0),(1,1),(2,2),(0,2),(2,0)\}$
$R_{\approx_4}$	$\{(0,0),(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$
$R_{\approx_5}$	$\{(0,0),(1,1),(2,2),(0,1),(1,0),(0,2),(2,0),(1,2),(2,1)\}$

S 上の2項関係を R とする時，R を含む最小の同値関係が存在する．それは，R を含む全ての同値関係の共通部分である．例えば，$\{0, 1, 2\}$ 上の関係 $R_{\sim 1}$ を $R_{\sim 1} = \{(0, 0)\}$ とすると，表2の $R_{\approx 1}$ が，$R_{\sim 1}$ を含む最小の同値関係である．また，$R_{\sim 2} = \{(0, 1)\}$ とすると，表2の $R_{\approx 2}$ が，$R_{\sim 2}$ を含む最小の同値関係である．

群や環など，代数構造を持つ対象について，その台集合 S 上の演算を $\{\cdot_1, \cdot_2, ..., \cdot_n\}$ とする時，S の任意の元，a, b, a', b' に対して，S 上の同値関係 $\approx$ が，$a \approx a'$ かつ $b \approx b'$ を満たすならば，$(a \cdot_x b) \approx (a' \cdot_x b')$ が，全ての $\cdot_x \in \{\cdot_1, \cdot_2, ..., \cdot_n\}$ に対して成立する時，$\approx$ を合同関係

(congruence relation) という．整数環 $\mathbb{Z}$ において，n を正の整数とする時，任意の $a, b \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$a \equiv b \pmod n \Leftrightarrow n \mid (a-b)$$

すなわち $a-b$ が n で割り切れる時かつその時に限り，$a \equiv b \pmod n$ とすれば，$\equiv \pmod n$ は，整数環 $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ 上の合同関係である．

2.3. 同値関係による類別

集合 S 上の同値関係を $\approx$ とする．$a \in S$ に対して，$[a] = \{a' \in S \mid a \approx a'\}$ を S における $\approx$ についての a の同値類 (equivalence class) という．同値類を $[a]$ と表記する時，a を $[a]$ の代表元という．S の $\approx$ についての同値類全体からなる集合 $S/{\approx}$ を S の $\approx$ による商集合 (quotient set) という．$\bigcup S/{\approx} = S$，すなわち S の全ての同値類の和集合は S となる．$S/{\approx} = \{[a] \mid a \in A\}, A \subseteq S$, A の任意の元 a_1, a_2 に対して，$a_1 \approx a_2$ が成立しない時，A を $S/{\approx}$ の完全代表系という．完全代表系の任意の元 a_1, a_2 に対して，$[a_1]$ と $[a_2]$ は互いに素であるため，$\bigcup S/{\approx}$ は直和となる．また，$S/{\approx}$ の任意の同値類 $[a]$ について，$a' \in [a]$ と $a' \approx a$ は論理的同値になる．

前節の最後に例としてあげた整数環 $\mathbb{Z}$ 上の合同関係でもある同値関係 $\equiv \pmod n$ について，$\mathbb{Z}$ の $\equiv \pmod n$ による商集合は，$\mathbb{Z}/{\equiv} \pmod n = \{[0], [1], [2], ..., [n-1]\}$,
$[0] = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}, [1] = \{1 + nz \mid z \in \mathbb{Z}\}, ..., [n-1] = \{(n-1) + nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ となる．

表 2 に示した $\{0, 1, 2\}$ 上の同値関係による商集合の例を，表 3 に示す．

表 3: $\{0, 1, 2\}$ 上の同値関係による商集合の例

商集合	同値類
$\{0, 1, 2\}/R_{\approx_1}$	$[0] = \{0\}, [1] = \{1\}, [2] = \{2\}$
$\{0, 1, 2\}/R_{\approx_2}$	$[0] = [1] = \{0, 1\}, [2] = \{2\}$
$\{0, 1, 2\}/R_{\approx_3}$	$[0] = [2] = \{0, 2\}, [1] = \{1\}$
$\{0, 1, 2\}/R_{\approx_4}$	$[0] = \{0\}, [1] = [2] = \{1, 2\}$
$\{0, 1, 2\}/R_{\approx_5}$	$[0] = [1] = [2] = \{0, 1, 2\}$

2.4. 擬順序から誘導される半順序

$\preceq$ を S 上の擬順序とする. この時，S の任意の 2 つの元 a, b に対して，

$$a \approx b \Leftrightarrow a \preceq b \text{かつ} b \preceq a$$

と定めると，$\approx$ は S 上の同値関係となる．実際，S の任意の元 a に対して，$\preceq$ が擬順序であり反射律が成り立つことから，$a \preceq a$ かつ $a \preceq a$ が成立するため $a \approx a$ が成立し，$\approx$ は反射律を満たす．また，$a \approx b$ である時，$\approx$ の定義より $a \preceq b$ かつ $b \preceq a$ であるから，$b \preceq a$ かつ $a \preceq b$ が成立するため $b \approx a$ が成立し，$\approx$ は対称律を満たす．また，$a \approx b$ かつ $b \approx c$ が成立するとする．この時，$\approx$ の定義から $a \preceq b, b \preceq a, b \preceq c, c \preceq b$ が成立している．$\preceq$ は擬順序であり，推移律が成立するため，$a \preceq c$ かつ $c \preceq a$ が成立し，$a \approx c$ となり，$\approx$ は推移律を満たす．よって $\approx$ は，S 上の同値関係となる．

この $\approx$ による S の商集合 $S/\!\approx$ の任意の元，$[a],[b]$ に対して，

$$[a] \preceq' [b] \Leftrightarrow a \preceq b$$

と定めると，$\preceq'$ は $S/\!\approx$ 上の半順序となる．このように定まる半順序を擬順序 $\preceq$ から誘導された半順序という．$[a]$ の任意の元 a'，$[b]$ の任意の元 b' に対して，$a \approx a', b \approx b'$，すなわち $a \preceq a', a' \preceq a, b \preceq b', b' \preceq b$ が成り立つ．そのため，$\preceq$ の推移律により $a \preceq b$ ならば $a' \preceq b'$，$a' \preceq b'$ ならば $a \preceq b$ が成立し，$\preceq'$ は代表元の取り方によらず well-defined である．$S/\!\approx$ の任意の元を $[a],[b],[c]$ とする．$\preceq$ の反射律により，$a \preceq a$ であるから $[a] \preceq' [a]$ が成立し，$\preceq'$ は反射律を満たす．$[a] \preceq' [b]$ かつ $[b] \preceq' [a]$ である時，$\preceq'$ の定義より，$a \preceq b$ かつ $b \preceq a$ であり，$a \approx b$ となるため $[a] = [b]$ となり，$\preceq'$ は反対称律を満たす．$[a] \preceq' [b]$ かつ $[b] \preceq' [c]$ である時，$\preceq'$ の定義と $\preceq$ が推移律を満たすことから，$a \preceq c$ となり，$[a] \preceq' [c]$ が成立し，$\preceq'$ は推移律を満たす．よって $\preceq'$ は，$S/\!\approx$ 上の半順序関係となる．

このように定まる半順序を擬順序から誘導された半順序という．リンデンバウム-タルスキ代数 (Lindenbaum-Tarski algebra) は，擬順序から誘導された半順序集合の例であり，直観主義論理のハイティング代数による意味論の完全性の証明等にも使われる．

3. 「似ている」と「同じ」の比較

3.1. 「似ている」と「同じ」が満たす性質

「同じ」という概念は，同値関係である．これは，反射律，対称律，推移律のいずれか一つでも満たさない関係を「同じ」という概念として考え難いことからも妥当な定義であると言える．ある対象はその対象自身と同じはずである．また，対象 a と b が同じであるならば，b と a も同じであるはずである．また対象 a と対象 b が同じで，対象 b と対象 c が同じであるならば，a と c も同じはずである．数学以外でも使われる「同じ」という概念も，反射律，対称律，推移律を満たし，同値関係であることが確かめられる．例えば，A さんは自分自身と血液型が同じであり，A さんと B さんの血液型が同じならば，B さんと A さんの血液型は同じである．A さんと B さんの血液型が同じで，B さんと C さんの血液型が同じであるならば，A さんと C さんの血液型は同じである．

一方,「同じ」ではなく,「似ている」という概念は，対称律と反射律は満たすと考えられるが，一般的に推移律を満たさない．人間が日常的に使っている「似ている」の概念においても，パンとメロンパンは似ていて，メロンパンとメロンは似ているが，パンとメロンは似ていると言い難いことも分かり易い例であろう．以降の節では,「似ている」の概念の妥当であると考えられる定義の一つを示し，より厳密に「似ている」という概念について考察する．

3.2. 「似ている」の妥当な定義

「似ている」についての妥当な定義の一つとして，対象と対象の間に定められる距離がある正の実数以下であることを「似ている」とすることが考えられる．この定義による「似ている」の概念を，以下では距離に基づく類似と表現する．まず距離の定義を確認する．

定義 6 (距離の公理)

S を任意の空でない集合とし，$\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする．関数 $d\colon S \times S \to \mathbb{R}$ が，次の

1. から 4. の条件を満たす時，かつその時に限り d を S 上の距離関数という． また，$S \times S$ の任意の元 (p, q) の d による像 $d(p, q)$ を，p と q の距離という．

1. $S \times S$ の任意の元 (p, q) に対して，$d(p, q) \geq 0$ (非負性)
2. $S \times S$ の任意の元 (p, q) に対して，$d(p, q) = 0$ となるのは，$p = q$ である場合，かつその時に限る． (同一律)
3. $S \times S$ の任意の元 (p, q) に対して，$d(p, q) = d(q, p)$ (対称性)
4. $S \times S$ の任意の元 $(p, q), (q, t)$ に対して，
   $d(p, t) \leq d(p, q) + d(q, t)$ (三角不等式)

この距離に基づく類似の定義では，2 つの対象の距離が 0 であることは，2 つの対象が集合の元として同一あることを示す.「似ている」という概念は,「良く似ている」,「あまり似ていない」という表現が使われるように，通常度合いを持っている概念であると考えられる．距離に基づく類似では，その度合いを示すのが距離であり，距離が 0 に近いほど「良く似ている」，距離が大きいほど「あまり似ていない」ことを意味する．また，α をある正の実数とする時，対象 a, b, c について，$d(a, b) \leq \alpha$ かつ $d(b, c) \leq \alpha$ であったとしても，$d(a, c) \leq \alpha$ は必ずしも成立しない．このことは距離に基づく類似において，推移律が必ずしも成立しないことを意味している．

3.3. 距離に基づく類似の例

2 つの可視光に対して，それぞれの波長 (単位:nm[ナノメートル]) の差の絶対値は距離となる．この距離は $\mathbb{R}$ 上のマンハッタン距離である．そして，2 つの可視光の波長 (単位:nm) のマンハッタン距離が 40 以下である時,「似ている」と定義すれば，黄色 (570nm)[1] と黄緑色 (550nm) の距離は 20 であるため似ていて，黄緑色 (550nm) と緑色 (520nm) の距離は 30nm であるため似ていることになる．しかし，黄色と緑色の距離は 50nm であり，似ていないことになる．人間の感覚として，色が似ているか似ていないかは主観的な問題であり，人間の主観は上記の定義と必ず一致するとは言えない．しかし，距離に基づく色の類似は，その本質を形式的に定義している．

別の例として，ユークリッド幾何学の三角形の類似について示す．2 つの三角形 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ に対して，それぞれの角 (度数法) の差の絶対値の総和の最小値をそれらの三角形の距離 $d(\triangle ABC, \triangle A'B'C')$ と定義する．すなわち

$$
\begin{aligned}
d(\triangle ABC, \triangle A'B'C') = min\{|x_1 - x_1'| + |x_2 - x_2'| + |x_3 - x_3'|\} \\
(x_1, x_2, x_3 \in \{A, B, C\}, x_1', x_2', x_3' \in \{A', B', C'\})
\end{aligned}
$$

とする．そして，

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow d(\triangle ABC, \triangle A'B'C') <= 20$$

と定義する．この時，図 1 の例では，

$$d(\triangle ABC, \triangle A'B'C') = 20, d(\triangle A'B'C', \triangle A''B''C'') = 20,$$
$$d(\triangle ABC, \triangle A''B''C'') = 40$$

となる．よって図 1 の通り，$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ かつ $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ である．しかし，$\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$ ではない．

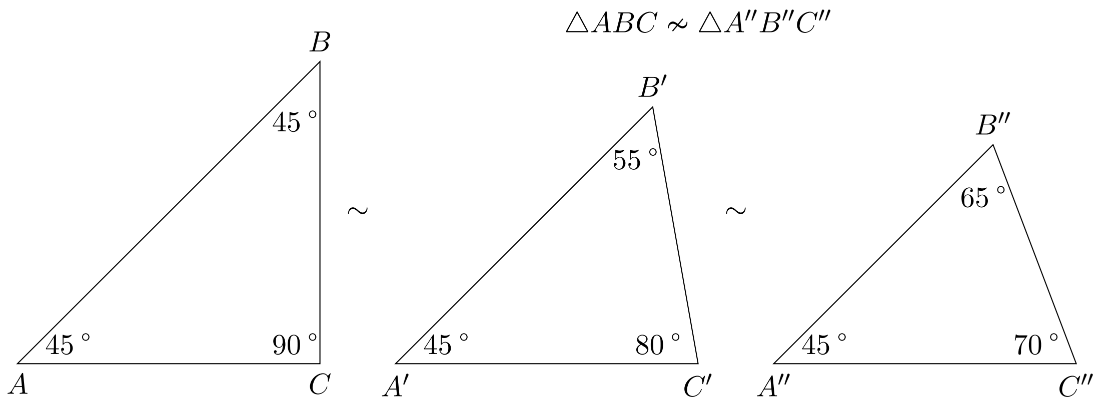


図 1: 三角形の距離に基づく類似の例

2 次元平面上の三角形の全体を S とする．三角形の相似を $\approx$ とすると，$\approx$ は S 上の同値関係となる．相似な三角形は 3 つの対応する角が等しい．そのため，ここで定義した距離は $S/\approx$ 上の距離，関係 $\sim$ は $S/\approx$ 上の関係となる．そして，$\sim$ は反射律と対称律を満たすが，推移律は満たさない．

3.4. その他の類似の例

V を n 次元内積空間とする．V の任意の 2 つのベクトルを $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ とし，α をある実数とする．この時，

$$\boldsymbol{v_1} \sim \boldsymbol{v_2} \Leftrightarrow \arccos \frac{< \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} >}{\|\boldsymbol{v_1}\| \|\boldsymbol{v_2}\|} \leq \alpha$$

すなわち，2 つのベクトルの成す角が α 以下の時，かつその時に限り $\boldsymbol{v_1} \sim \boldsymbol{v_2}$ と定める．$\sim$ は反射律と対称律を満たすが，推移律は満たさない．この類似の類似度は，2 つのベクトルの成す角であり，小さいほど類似度が高いとみなせる．この $\sim$ は，機械学習や統計学で良く使われる，コサイン類似度や相関係数に基づく類似に相等する．例えば，$\mathbb{R}^2$ の標準的な内積空間において，ベクトルの成す角が 20° 以下である時，類似すると定めると，図 2 のように，$\boldsymbol{v_1}$ と $\boldsymbol{v_2}$ の成す角が 12.5°，$\boldsymbol{v_2}$ と $\boldsymbol{v_3}$ の成す角が 12.5° である時，$\boldsymbol{v_1} \sim \boldsymbol{v_2}$ かつ $\boldsymbol{v_2} \sim \boldsymbol{v_3}$ であるが，$\boldsymbol{v_1}$ と $\boldsymbol{v_3}$ の成す角は 25° で $\boldsymbol{v_1} \sim \boldsymbol{v_3}$ ではない．

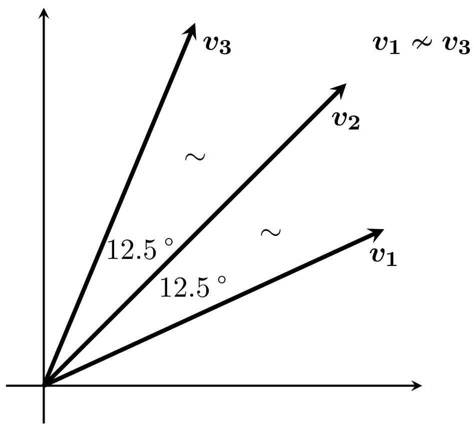


図 2: ベクトルの成す角に基づく類似

Sを集合とし，$\mathfrak{P}(S)$をSの冪集合とする．$\mathfrak{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$の任意の2つの元$A, B$に対して，

$$A \sim B \Leftrightarrow (A \cap B \neq \emptyset)$$

と定義すると，$\sim$は反射律と対称律を満たすが，推移律は満たさない．例えば，図3のように，$A \sim B$かつ$B \sim C$であるが，$A \sim C$ではない．この共通部分に基づく類似の類似度としては，共通部分の位数が考えられ，共通部分の位数が大きいほど類似していると定められる．

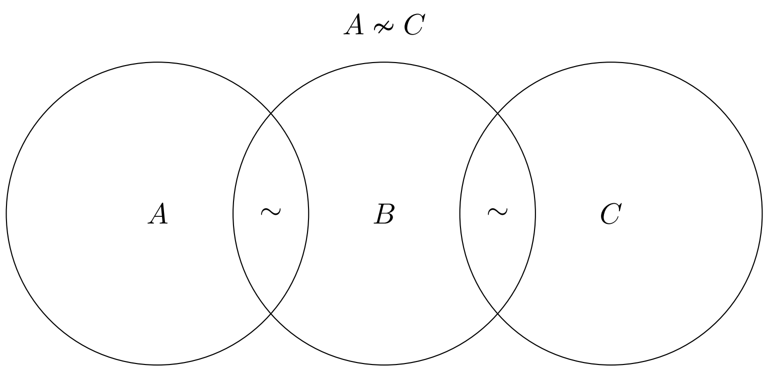


図 3: 共通部分に基づく類似の例

4. 同値関係の比較

集合S上の同値関係の全体からなる集合系(集合の集合)をEとする．S上の(同値)関係の定義より，$E \subseteq \mathfrak{P}(S \times S)$である．$E$上の同値関係として，集合の相等$=$を考えると，$S \times S$の部分集合として異なる同値関係は，$E$上の同値関係$=$のもとでは同値ではなく，従ってそれらは異なる「同じ」という概念であると考えられる．表2に示した，$R_{\approx_1}$から$R_{\approx_5}$は，$=$のもとでは全て異なる同値関係である．

一方，E上の同値関係として，Eの任意の元$R_{\approx_1}, R_{\approx_2}$に対して，$R_{\approx_1}$が同値関係かつ$R_{\approx_2}$が同値関係である時，かつその時に限り$R_{\approx_1} \approx R_{\approx_2}$と定義すると，$\approx$は$E$上の同値関係となる．また，この$\approx$のもとでは，$E$の元は全て同値，すなわち$E$の同値関係は，全て同じ

「同じ」という概念であると考えられる．表 2 に示した，$R_{\approx_1}$ から $R_{\approx_5}$ も，$\approx$ のもとでは全て同じ同値関係である．

このように，集合論の観点からは，同値関係上の同値関係をどのように定義するかによって,「同じ」という概念が全て同じであるか否かは異なるのである．また，前章の最後の節で定義した共通部分による類似によって，同値関係上の類似を定義すると，これらの全ての同値関係は類似しているとも言える．

非空である集合 S 上の同値関係を $\approx$ とする．S の元を対象，S の任意の元 a, b に対して，$a \approx b$ の時，a から b への唯一の射が存在するとした圏を，S 上の同値関係の圏 $\mathbb{S}_{\approx}$ とする．この圏では，全ての射は同型射となり，任意の対象から任意の対象への射は高々一つとなる．S 上の同値関係の圏は，必ずしも圏同型ではない．しかし圏は，その圏からそれぞれの対象について，それと同型な対象を全て除いた充満部分圏と圏同値になる．従って，S 上の同値関係の圏は，全て離散圏と圏同値となるため，S 上の同値関係の圏は全て圏同値である．このように，圏論的な観点からは「同じ」という概念は，全く同一ではないが，全て本質的には同じであると考えることもできる．

5. おわりに

数学においても，数学以外の科学においても,「同じ」という概念は重要な基礎であり，これについて深く理解することは科学的な考察力を高めることに繋がると考えられる．本研究では，同値関係に基づき,「似ている」と「同じ」という概念を比較すること，同値関係上の同値関係を考察することを通して,「同じ」という概念について学習者が理解を深める方法を提案した．

今後，本研究で提案した方法を大学授業で実践し，フィードバックを得て継続的に指導方法を改善していく．

参考文献

[1] 国立天文台, 2014 年, 理科年表 平成 27 年, pp443.
[2] 文部科学省, 2018 年, 【数学編 理数編】高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）.
[3] 文部科学省, 2018 年, 【情報編】高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）.

現代社会における道徳教育の課題に対する取り組み
–現代的な課題に関する教材の検討–

第一工科大学　共通教育センター　倉元　賢一

要旨

本研究では、現代的な課題を道徳教育でどのように扱うかについて検証した。複雑化する現代社会において、学習者が主体的に行動する力を育成するための学習方法として、ARCS モデルやガニエの 9 教授事象などの教育理論と、ケースメソッドなどを取り入れることが有効であると示唆された。また、教材に必要な要素の提案（①学習者の興味と感心、②人間尊重の精神と現実問題の解決、③多様な視点（状況評価と概念応用の技能の育成）、④グループ、個人を問わず、様々な学習単位での有効性の認識、⑤既成概念の応用と新しい概念の獲得）を行った。加えて、現代的コロナ禍に関する教材においては、実体験や追体験による変化はあるが、調査年による違いも少なく普遍性があることが示された。

キーワード : 現代的な課題、インストラクショナルデザイン、オーセンティック、問題解決

1.　はじめに

2015 年から OECD が主導している Future of Education and Skills 2030 プロジェクトは、2030 年に向けた教育の方向性を示している。子どもたちの知識（knowledge）、スキル（skills）、態度及び価値（attitudes and values）を発達させる中で、「よりよい未来の創造に向けた変革を起こすコンピテンシー」（新しい価値を創造する力、対立やジレンマに対処する力、責任ある行動をとる力）を備えていく必要性を唱えている。（OECD2019 a ） [1] [2]

また、2016 年の中教審では「子供たち一人一人が、予測できない変化に受け身で対処するのではなく、主体的に向き合って関わり合い、その過程を通して、自らの可能性を発揮し、よりよい社会と幸福な人生の創り手となっていけるようにする」 [3]としている。その後に告示された学習指導要領はこのことを考慮した内容になっていると考えられる。

このような背景の中で「特別の教科　道徳」（以下道徳）において、現代的な課題についての取り扱いについて「現代社会を生きる上での課題を扱う場合には、問題解決的な学習を行ったり討論を深めたりするなどの指導方法を工夫し、課題を自分との関係で捉え、その解決に向けて考え続けようとする意欲や態度を育てることが大切である。」と述べられている。[4]

このことから、教材の工夫し、オーセンティックな課題を設定したりすることで議論を深める授業展開にする必要があると考えられる。現代的課題を取り扱う上で、自我関与や問題解決的な学習を取り入れた先行研究としては、中村らの読み物資料に着目したケース開発の事例がある。この中で「読み物資料の内容を子どもにとって限りなくリアリティのあるものとして構成することで、子どもの関与の仕方がより主体的になり、さらに道徳的な諸価値

についての理解が深まった。」［5］としている。つまり、読み物資料の内容のリアリティさが関与を主体的にすることが示されている。このことから、現代的課題を扱う際に、リアリティがあること、もしくは実際にあったことを取り扱うことで、主体的に道徳的な諸価値について考え、議論できるような教材が期待できると考える。そこで、本研究では、道徳教育を取り巻く環境を整理し、2019 年（令和元年）末からの新型コロナウイルス感染症（COVID-19）の流行による災難や危機的状況である「コロナ禍」のような現代的課題の教材を道徳でどのように扱うべきかについて検証する。

2. 道徳教育の課題

東京学芸大学「総合的道徳教育プログラム」推進プロジェクト企画ミーティングによる過去の道徳授業の印象に関する調査によれば、かつて大学生が受けていた「道徳の時間」の授業について、「記憶にない」と回答した者が、小学校を対象にした調査で約 21.5%、中学校については約 32.1%、さらに授業に対して「肯定的な印象や感情」を持っていると回答した者は、小学校で約 20.5%、中学校では約 4.8%程度に過ぎず、「否定的な印象や感情」を持つ者は、小学校で約 10.2%、中学校では約 8.6%となっており、道徳の授業に関する否定的な感情を持っている率が高いと言える［6］。新川も同様に「学年が上がるにつれて、道徳の時間についての児童生徒の受け止めがよくない、児童生徒の発達段階を十分考慮せず、児童生徒に望ましいと思われるわかりきったことを言わせたり書かせたりするといった点も、（後略）」［7］と指摘している。このことに対して関根は『「特設」から半世紀以上経過してもなお、「道徳の時間」が正常に機能しないまま、本来の役割と使命を果たせていないケースが多々あることが理解される」［8］としている。加えて、『国語科での「物語」の読み取り学習に倣いながら、登場人物の「気持ち」や行動の変容に焦点を当てて道徳的心情の理解と価値の自覚を促し、共感的に理解させていく方法は、急速に受け入れられていったのである。オーソドックスな「道徳」の授業の基本型として、現在も主流の授業方法である』［8］とし、この授業方法の是非として『1990 年代以降に顕在化してきた様々な「現代的課題」に対してはほとんど無力であった。インターネットやスマートフォンの爆発的な普及や「いじめ問題」の例をあげるまでもなく、急激な情報インフラと生活環境の変化は新たな問題を生じさせたが、現実から切り離された「読み物教材」と「気持ち」を問い続けるステレオタイプの授業だけでは、こうした課題に対処しきれなかった』［8］としており、心情理解、価値の自覚、共感的理解の授業が必ずしも万能ではないことを示唆している。新川は『「道徳的価値の自覚及び自己の生き方を考える道徳授業において、話し合わせたいのは「どのように行動するべきか」ということではなく、「どのような考えに基づいて主人公はその行動をするのか」ということである．」』としており、関根と同様に、単純に答えを出すのではなく、現実に自分に起こったときにどのような考えに基づいて、どのような行動をするのかという問題解決の根拠を考えさせることが必要であり、問題そのものの吟味や精選の重要性を指摘している。これらのことから、児童生徒を取り巻く社会情勢に柔軟に対応することがで

きるオーセンティックかつ問題解決的な「道徳」の教材が必要であると考えられる。

3. 道徳の教材について

木下は「教材」について「教育活動において、一定の教育目的に従って選ばれた教育内容を学習者に教える際の材料となるもの」とし、「ある教材」と「なる教材」があるとしている。すでにつくられ、用意している教材が「ある教材」、実際に教育場面に活用されて教材になるのが「なる教材」としている [9]。教材化のポイントは「①子どもの興味・関心が生まれるものであること（学習意欲、問いの生成）。②学習内容が含まれるか、教科の特質を踏まえた内容であること、③どんな力がつくのか、学びの場が保障されるものであること、③多様な追究が可能か、多様な活動の場を保障するものであること」 [9]としている。

また、平成 29 年告示の小学校学習指導要領解説道徳編では、小学校学習指導要領における道徳科の教材の具備すべき条件として「①児童の発達の段階に即し、ねらいを達成するのにふさわしいものであること、②人間尊重の精神にかなうものであって、悩みや葛藤等の心の揺れ、人間関係の理解等の課題も含め、児童が深く考えることができ、人間としてよりよく生きる喜びや勇気を与えられるものであること、③多様な見方や考え方のできる事項を取り扱う場合には、特定の見方や考え方に偏った取扱いがなされていないものであること」を挙げている。

また、義務教育諸学校教科用図書検定基準（平成 29 年 8 月 10 日文部科学省告示第 105 号）では、「①現代的課題をテーマにした教材、「言語活動」「問題解決的な学習」「道徳的行為に関する体験的な学習」などの配慮、②児童生徒の心身の発達段階に即し、多面的・多角的に考えられるよう適切な配慮（偏らない見方）、③友情、信頼など内容の明示が挙げられている。 [10]

加えて、問題解決的な学習をする際に有効とされるケースメソッドがあるが、中村らによれば、『ケースメソッド教育を道徳教育の次元に導入する場合、子どもや参加者が判断や対処を求められる模擬ケースを教材に討論することが可能となり、道徳的な問題の当事者の立場に立って、とるべき行動を思考し、さらに判断を下すことができるようになるまでのプロセスを「個の尊重」と「関係性の創造」を同時に満たしつつ、道徳性についての思考を深めることができることが期待される。そして、このことは「道徳的実践力」の涵養へと繋がる基盤形成になり得るとみなすことができる。この期待を実現するためには、道徳的な問題に関わる。「ケース」を開発し、それを参加型・問題解決型で学習するという方法に基づいた授業として構成することを心がける必要がある。』 [11]としており、ケースメソッドを取り入れられるような内容であることも重要な要素であると考える。

ケースメソッドの効果は『（1）学生の興味を惹起しやすいために「自発的な学習意欲を喚起」すること（2）「現実問題の解決という“経験”のなかで概念や考え方」を自分のものにすることができること（3）現実問題をケースとするために状況評価と概念応用の技能を育成することができること（4）グループ研究や人間同士の相互関係の有効性を認識するこ

とができること（5）既成概念の応用と新しい概念の展開の方法を身につけることができること』 [11]が挙げられる。表1にその比較を示す。

表 1　現代的課題の教材に具備すべき条件

小学校学習指導要領における道徳科の教材の具備すべき条件	木下の「なる教材」の条件	高木晴夫のケースメソッド（1997/2003）
①児童の発達の段階に即し、ねらいを達成するのにふさわしいものであること	①子どもの興味・関心が生まれるものであること（学習意欲、問いの生成）。	①学生の興味を惹起しやすいために「自発的な学習意欲を喚起」すること
②人間尊重の精神 にかなうものであって、悩みや葛藤等の心の揺れ、人間関係の理解等の課題も含め、児童が深く考えることができ、人間としてよりよく生きる喜びや勇気を与えられるものであること	②学習内容が含まれるか、教科の特質を踏まえた内容であること	②「現実問題の解決という“経験”のなかで概念や考え方」を自分のものにすることができること
③ 多様な見方や考え方のできる事項を取り扱う場合には、特定の見方や考え方に偏った取扱いが なされていないものであること	③どんな力がつくのか、学びの場が保障されるものであること	③現実問題をケースとするために状況評価と 概念応用の技能を育成することができること
	④多様な追究が可能か、多様な活動の場を保障するものであること	④ グループ研究や人間同士の相互関係の有効性を認識することができること
		⑤既成概念の応用と新しい 概念の展開の方法を身につけることができること

これらの条件の共通点から、現代的課題を扱う道徳の教材に必要な要素として、

① 学習者の興味と感心

② 人間尊重の精神と現実問題の解決

③ 多様な視点（状況評価と概念応用の技能の育成）

④ グループ、個人を問わず、様々な学習単位での有効性の認識

⑤ 既成概念の応用と新しい概念の獲得

が考えられる。

4.　指導過程と教材の活用について

学習指導要領による、学習指導過程に関する記述は「一般的には、学習指導過程を導入、展開、終末の各段階に区分し」 [12]とあり、その内容は「ねらいに含まれる道徳的価値について、児童が道徳的価値についての理解を基に、自己を見つめ、物事を多面的・多角的に考え、自己の生き方についての考えを深めることができるようにする」[12]となっている。つまり、導入では教材への興味関心を高め、展開では中心的な教材で道徳的価値の理解を基に自己を見つめ、終末では、自己を振り返り課題をもつ場面であるといえる。

学習意欲向上のモデルとして、ケラーの ARCS モデルでは、学習者のモチベーション向上・維持のために、指導者が取るべき行動を「注意喚起（Attention）」「関連性（Relevance）」「自信（Confidence）」「満足感（Satisfaction）」の 4 要素として提示している。これらが導入、展開、終末の中に含まれることでより意欲の向上が見込まれる。

加えて、学習支援モデルとしてガニエの 9 教授事象がある。これは 9 つのインストラクシ

ョンとして、①学習者の注意を喚起する②学習者に目標を知らせる③前提条件を思い出させる④新しい事項を提示する⑤学習の指針を与える⑥練習の機会をつくる⑦フィードバックを与える⑧学習の成果を評価する⑨保持と転移を高めるという９つのステップを踏むことで効果的な教え方になるとされている。

これらのインストラクショナルデザインの諸理論を、道徳の学習指導過程に組み込むと表２のようになる。

表 2　道徳の学習過程とインストラクショナルデザインの諸理論

	導入	展開	終末
ARCSモデル	**注意(Attention)**:学習者の関心や好奇心を引きつける。	**関連性(Relevance)**:学習内容が学習者の個人的な目標や必要性とどのように関連しているかを示す。	**自信(Confidence)と満足(Satisfaction)**:学習者が自分の能力を信じ、学習結果に満足するようにする。
ガニエの教授理論	**注意を引く**：学習者の注意を引き、学習の準備を促す。	**提示と実践**：新しい情報を提示し、学習者がそれを使って練習する。	**フィードバックと評価**：学習者のパフォーマンスにフィードバックを提供し、学習結果を評価する。
道徳の教材活用①	**教材への興味関心**	**中心教材**	**生活（自己）**
道徳の教材活用②	**生活（自己）**	**中心教材**	**生活（自己）**

※木下の道徳の教材の活用にARCSモデルとガニエの教授理論を比較して加筆

これらより、道徳の学習過程にインストラクショナルデザインの諸理論を組み込むことにより、道徳の学習に必要な教材の在り方が整理される。木下は「道徳科の問題解決的な学習であれば、(中略)、内容に収束する仕組みが必要である。」[9]としていることを加えて現代的課題における問題解決的な学習の在り方として、導入で注意を引き、展開で関連性の高い中心教材を用いて、個人やグループで考えたり議論したりしたうえで、終末では自己の問題として収束していくような学習が考えられる。

5.　コロナ禍における道徳の学習の取り組み

新型コロナウイルスの感染拡大に伴い、道徳教育の現場でも様々な取り組みが行われてきた。2022 年度より高校では公民科の必修科目として「公共」が新設された。その目標は「社会的な見方･考え方を働かせ、現代の諸課題を追究したり解決したりする活動を通して、広い視野に立ち、グローバル化する国際社会に主体的に生きる平和で民主的な国家及び社会の有為な形成者に必要な公民としての資質・能力を育成することを目指す」[13]としている。寺脇は『新型コロナウイルスを教材にして「考え、議論する道徳」を実践する絶好のチャンスだと思います。ただし、小中学校の子どもたちが、道徳の時間に学ぶべきなのは、いわゆる昔からの道徳ではなく、「公共」なのです。』[14]とし、現代社会の諸問題の解決に向け、自己と社会の関わり方を踏まえ、社会に参画する主体として自立することや、他者と協働してよりよい社会を形成する学ぶことが、小中学校の道徳を受け継ぐ概念であるとして、コロナ禍に取り組むべきこととしている。また、教材選びにしても「道徳の教科書に

縛られる必要はありません。（中略）教科書を消化することは目的ではなく、あくまでも手段です。目的は学習指導要領に定められた内容について子どもが「考え、議論する」ことです。」[14]としている。さらにその内容としても「子どもたちにはゼロか100かではない、その中間のどこを選ぶのがいいのかという公共への対応の仕方を学ばせてやってほしい」[14]とし、前項で述べた現代的課題を扱う道徳の教材に必要な要素の③多様な視点、⑤既成概念の応用と新しい概念の獲得と合致した内容を推奨している。

また、岡田は医療従事者を例にしながら利己と利他や共感と感謝について学年の生徒・先生が一堂に集まって授業を行っている。この実践を通して「生徒みんなが同じテーマを考え、互いの意見を共有しながら道徳性を深めていく授業の素晴らしさを痛感しました。コロナの流行のために、経済の停滞、医療の崩壊、福祉の破綻など様々な社会問題が起こっています。デュルケムが提唱するように社会学の視点から道徳教育を考えることも忘れてはならないと実感しています。」[15]と述べている。この取り組みは前項で述べた現代的課題を扱う道徳の教材に必要な要素②人間尊重の精神と現実問題の解決、④グループ、個人を問わず、様々な学習単位での有効性の認識と合致している。

これらのことから、現代的な課題としてコロナ禍を題材とする学習を行う上で、②人間尊重の精神と現実問題の解決、③多様な視点（状況評価と概念応用の技能の育成）④グループ、個人を問わず、様々な学習単位での有効性の認識、⑤既成概念の応用と新しい概念の獲得の要素が実践事例として挙げられており、新たな教材を作成する上で必要となる要素であると考える。

6.　コロナ禍に対する学生の意識の変容について

ここまでに、現代的課題を取り扱う場合のオーセンティックかつ問題解決的な「道徳」の教材に必要な要素を整理してきた。これらの要素を満たし、かつインストラクショナルデザインの諸理論に基づき、効果的な学習を行うためには、実体験を教材とすることが望ましいと考えられる。

そこで、コロナ禍の令和3年9月25日に鹿児島テレビの「ナマ・イキ Voice」で放送された「コロナになってみてはじめてわかったこと」の教材化について検討することにした。この番組では、スタッフがコロナに罹患したときのことを時系列で追い、その時々の気持ちや周りの人の対応、自分自身の考えや願いなどを解説したものである。先に挙げた現代的課題を扱う道徳の教材に必要な要素である①学習者の興味と感心、②人間尊重の精神と現実問題の解決、③多様な視点（状況評価と概念応用の技能の育成）を満たすものであると考え採用した。④グループ、個人を問わず、様々な学習単位での有効性の認識、⑤既成概念の応用と新しい概念の獲得に関しても、教材化する際に授業の展開次第で可能であると考えた。

今回は、D 大学の教職課程で道徳教育を履修した学生を対象に、視聴後の感想からコロナ禍に対する意識の変容を調査することで、教材化することの普遍性を検証する。

具体的には、令和3年、令和4年、令和5年、それぞれの年度で受講生に同番組を視聴し

た後に感想を記入してもらい、テキストマイニングにより分析する。分析には KH Coder 3(3.Beta.07b)を用いた。

6.1　令和３年度の受講生の結果

令和３年度は対象が３年生３名、４年生２名の計５名であった。実施時期は令和３年 11 月である。結果を図に示す。

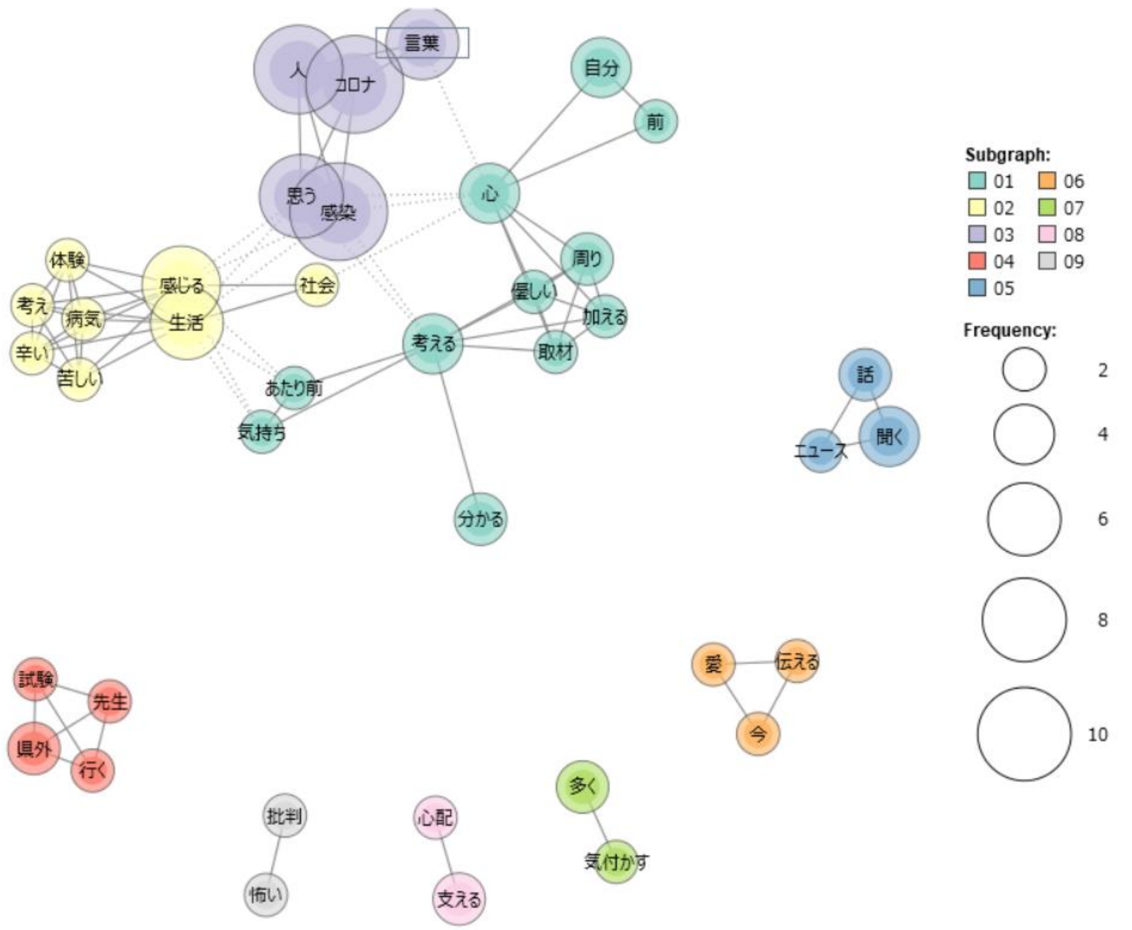


図 1　令和３年度の受講生の感想の共起ネットワーク

図１から、コロナの現実認識、感謝と支えあい、愛とやさしさ、日常の尊さ、差別と批判が共起していることがわかる。このことから、学生たちはコロナウイルスの現実を深く理解しており、自分たちや他人が感染する可能性を認識し、その結果として生じる社会的な断絶や絶望を感じており、感染者数の背後にある一人一人の苦しみを強く感じていることが推察される。同時に、周囲の人々からの支えとして、先生や友達、両親などからの励ましや心配を受けて、健康に過ごすことができていることに感謝の記述が見られた。

加えて、コロナ感染者へのさりげない言葉や行動が社会全体に広がることで、コロナ社会

になる前の世界よりも多くの愛とやさしさを感じることができると考えており、感染者自身が伝える情報によって、自分たちの考え方が変わることを実感している記述が見られた。さらに、コロナに感染することで日常生活の尊さとして当たり前の生活がどれほど幸せであったかを感じ、その大切さを再認識している。

同時に、コロナ感染者への差別や批判の存在を認識しており、感染者自身の発表や周囲からの優しい言葉によって、その心配や恐怖が軽減されると感じている。

6.2　令和４年度の受講生の結果

令和４年度は対象が３年生 11 名であった。実施時期は令和４年 11 月である。結果を図に示す。

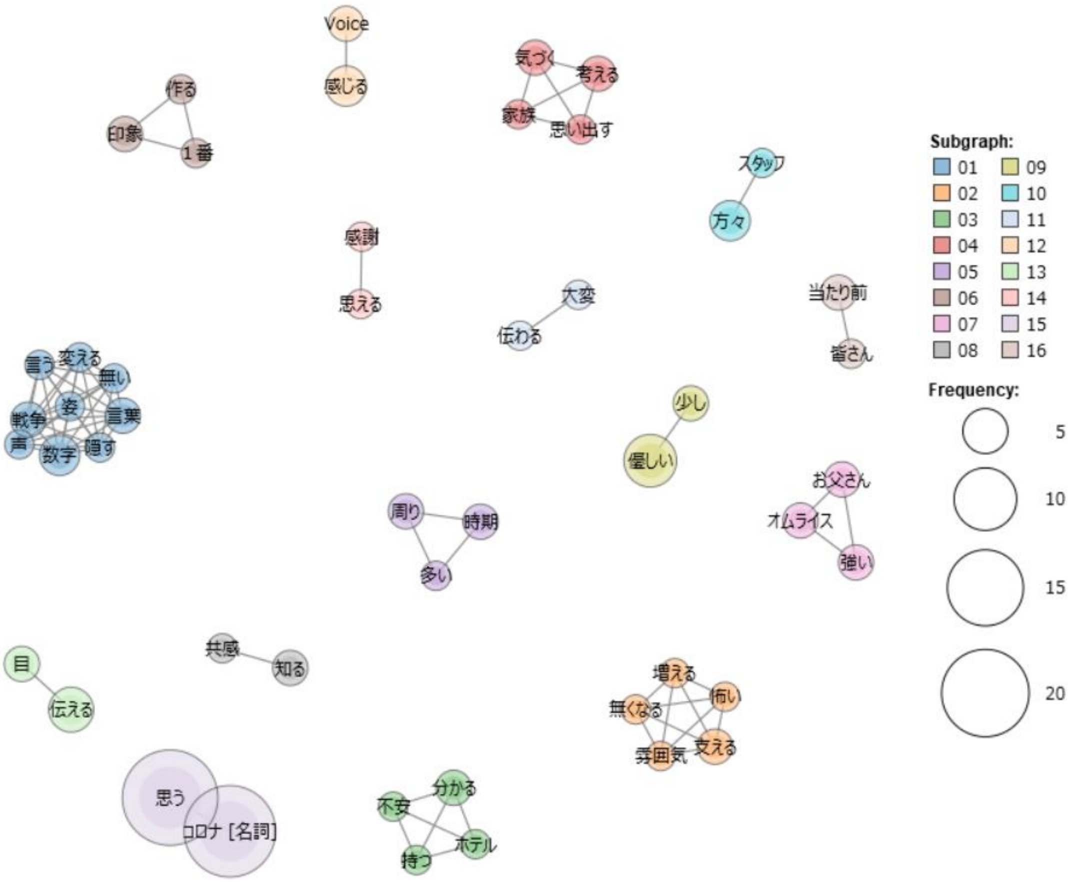


図 2　令和４年度の受講生の感想の共起ネットワーク

図２から、コロナの現実認識、感謝と支えあい、愛とやさしさ、日常の尊さ、差別と批判が共起していることがわかる。令和３年度と同様に、コロナウイルスの現実や他者との関わりについて理解していると考えらえる。

6.3　令和５年度の受講生の結果

令和５年度は対象が３年生６名であった。実施時期は令和５年１２月である。結果を図３に示す。

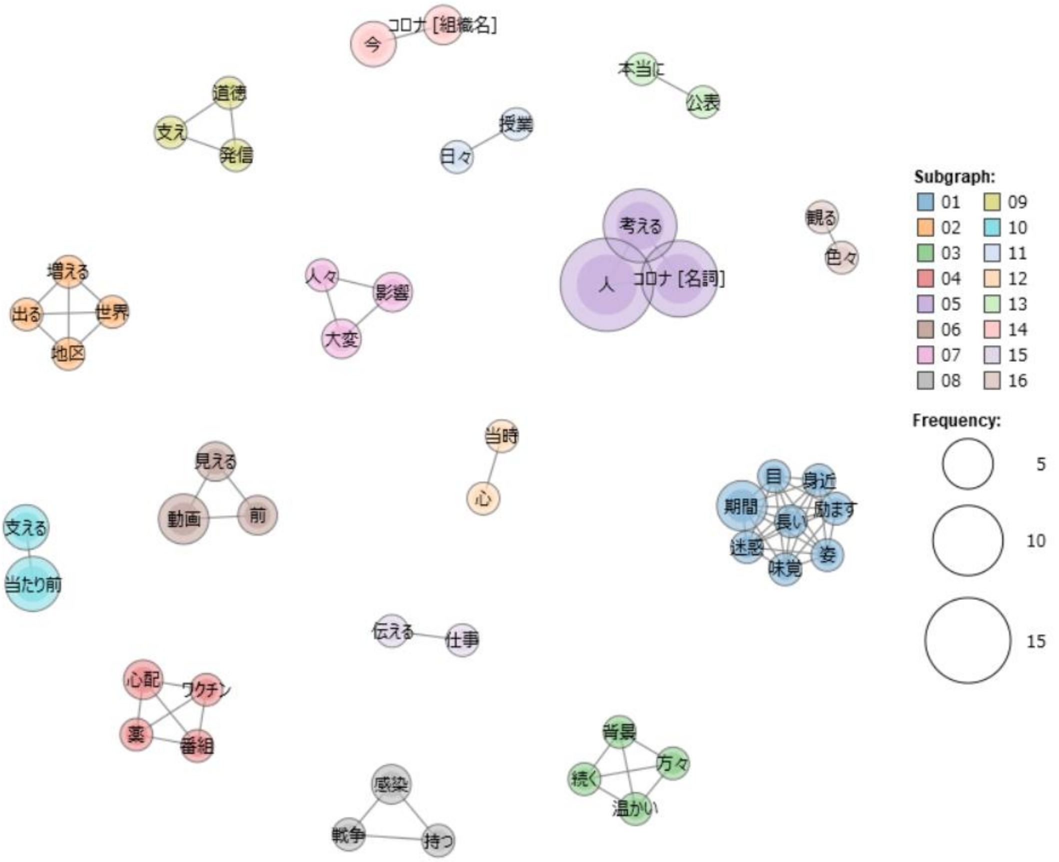


図 3　令和５年度の受講生の感想の共起ネットワーク

図３から、令和３・４年の学生たちと同様に、現実認識、感謝と支え合い、愛とやさしさ、日常の尊さ、差別と批判などが共起してコロナウイルスの現実や他者との関わりについて理解していると考えらえる。

6.4　結果の考察

令和３年（以下Ｒ３）、令和４年（以下Ｒ４）、令和５年（以下 R5）において、受講生たちからの感想からは、ほぼ同様の現実認識、感謝と支え合い、愛とやさしさ、日常の尊さ、差別と批判などの共起が見られた。この結果と実際の感想とを比較しながら項目別に分析を行った。

現実認識については、R3 の学生もコロナウイルスの現実を理解していたが、R4 と R5 の学生は自身や周囲の人々がコロナウイルスに感染した経験から、その恐怖と不安をより深

く感じていた。

感謝と支え合いについては、R3 の学生たちは周囲の人々からの支えを感じていたが、R4 と R5 の学生たちは、自身や周囲の人の感染が増えたため、家族や友人、看護師など周囲の人々からの支えや励ましをより強く感じていることがうかがえた。

愛とやさしさについては、R3 の学生たちは、コロナ感染者へのさりげない言葉や行動が社会全体に広がることで、多くの愛とやさしさを感じることができると考えていたが、しかし、R4 と R5 の学生たちは、感染者自身が伝える情報のほうが伝わりやすいと感じていた。

日常の尊さについては、どの年度の学年についても、その尊さを認識していた。

差別と批判については、R3 の学生たちは、コロナ感染者への差別や批判の存在を認識していたが、R4 と R5 の学生たちは、感染者自身の発表や周囲からの優しい言葉によって、その心配や恐怖がより軽減されると感じていた。

R3 と R4 と R5 を比較すると、自身や周囲の感染が広まった経緯もあり、コロナに罹患したことによる実感が加わっていた。これらの変化は、時間の経過とともに解釈が変わり変化する可能性もあるが、概ね普遍的な意見を得ることができる教材であると考えられる。また、現代的課題を扱う道徳の教材に必要な要素として提案した、①学習者の興味と感心、②人間尊重の精神と現実問題の解決、③多様な視点（状況評価と概念応用の技能の育成）、④グループ、個人を問わず、様々な学習単位での有効性の認識、⑤既成概念の応用と新しい概念の獲得の 5 つの要素にも対応し得る教材であると考えられる。

7. まとめ

本研究では、コロナ禍のような現代的課題を道徳の学習でどのように扱うべきかについて検証した。児童生徒を取り巻く社会情勢は複雑化しており、自ら主体的に行動することが求められる現代においては、課題に対して柔軟に対応するための経験が必要となる。道徳の時間でオーセンティックかつ問題解決的な「道徳」の教材による学習を行うことで、現実に自分に起こったときにどのような考えに基づいて、どのような行動をするのかという問題解決の根拠を持つことができる。そのような行動の根拠を持つことで、社会情勢に柔軟に対応することができるようになると期待される。

また、その学習方法においては、ARCS モデルや 9 教授事象などインストラクショナルデザインの諸理論とケースメソッドなどを有効に取り入れることが有効であることが示唆された。加えて教材においては、現代的課題を扱う道徳の教材に必要な要素（①学習者の興味と感心、②人間尊重の精神と現実問題の解決、③多様な視点（状況評価と概念応用の技能の育成）、④グループ、個人を問わず、様々な学習単位での有効性の認識、⑤既成概念の応用と新しい概念の獲得）を提案し、コロナ禍に行われていた実践や提案と比較検討した。その結果、これらの要素が比較した実践に含まれていることから教材選定や作成のための指標として活用できる可能性が示唆された。

さらに、コロナ禍を現代的な課題として扱う際に実体験を教材として扱う際、その普遍性

についての検討を行った。教職課程の学生を対象に行った R3〜 5 年の調査では、実体験を経たことによる変化はあったが、社会全体について考える課題として普遍性があることがうかがえた。

今後は、今回検証した教材を用いて指導案の作成と授業実践を行い、その結果を検証し、オーセンティックな課題による「考え、議論する」道徳の授業にインストラクショナルデザインの諸理論の要素を加えながら、より実践力を高めることができるような教材と指導案の作成とその効果の検証を行っていきたい。

謝辞

教材として番組の使用を許可していただいた鹿児島テレビ放送様、同局アナウンサーの川路あかり様、番組スタッフの皆様に感謝申し上げます。

引用文献

[1] OECD, “OECD FUTURE OF EDUCATOIION AND SKILLS 2030, ” 5 2019. [オンライン]. Available: https://www.oecd.org/education/2030-project/. [アクセス日: 1 12 2023].

[2] 田沼茂紀, 道徳は本当に教えられるのか－未来から考える道徳教育へ, 東洋館出版社, 2023.

[3] 中央教育審議会, “幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）【概要】”, 中央教育審議会, 2016.

[4] 文部科学省, 中学校学習指導要領 (平成 29 年告示) 解説　特別の教科　道徳編, 日本: 文部科学省, 2017.

[5] 中村美智太郎・鎌塚優子・上野博史, “道徳教育における現代的課題に対応したケース開発と実践の検討, ” 静岡大学教育実践総合センター紀要, 第 28 巻, pp. 39-47, 2018.

[6] 東京学芸大学「総合的道徳教育プログラム」推進プロジェクト企画ミーティング, “過去の道徳授業の印象に関する調査, ” 東京学芸大学「総合的道徳教育プログラム」推進プロジェクト企画ミーティング, 2014.

[7] 新川靖, “効果的な道徳教育のための指導方法についての研究 〜道徳学習プログラムの実践をもとに〜, ” 関西福祉大学発達教育学部研究紀要, 第 2 巻, 第 1 号, pp. 37-45, 2016.

[8] 関根明伸, “「現代的課題」に向き合う道徳教育の方向性－韓国・道徳科の事例を中心に－, ” 道徳と教育, 333 巻, pp. 129-135, 2015.

[9] 木下美紀, “道徳科における教材の効果的な活用 ―読み物教材の活用の視点を通し

て一，”道徳と教育， 336 巻， pp. 131-140， 2018.

[10] 文部科学省，“義務教育諸学校教科用図書検定基準（平成 29 年 8 月 10 日文部科学省告示第 105 号），” 10 8 2017. [オンライン]. Available: https://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/kyoukasho/kentei/1411168.htm. [アクセス日: 30 11 2023].

[11] 中村美智太郎・鎌塚優子・岡田加奈子・鵜澤京子・竹内伸一，“ケースメソッド教育のアプローチを活用した道徳教育の可能性 ：教材の開発とそれを用いた授業の検討，”静岡大学教育研究， 第 11 巻， pp. 59-74， 2015.

[12] 文部科学省， 小学校学習指導要領 (平成 29 年告示) 解説 特別の教科 道徳編， 文部科学省， 2017.

[13] 文部科学省， 高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説 公民編， 2018.

[14] 寺脇研，“コロナ禍の今こそ，小中学校の道徳の時間に「公共」を学ぼう，”みんなの教育技術，20 12 2020. [オンライン]. Available: https://kyoiku.sho.jp/71918/. [アクセス日: 30 11 2023].

[15] 岡田芳廣，“学び！と道徳 2＜Vol.18＞，”日本文教出版， 22 4 2022. [オンライン]. Available: https://www.nichibun-g.co.jp/data/web-magazine/manabito/doutoku2/doutoku2_018/. [アクセス日: 30 11 2023].

執筆者一覧（執筆順）

当金　一郎　　第一工科大学 情報電子システム工学科 教授
渋沢　良太　　第一工科大学 情報電子システム工学科 講師
倉元　賢一　　第一工科大学 共通教育センター 准教授

紀要編集委員一覧

福永　知哉　　第一工科大学共通教育センター 教授／共通教育センター長（紀要編集委員長）
永田　正明　　第一工科大学共通教育センター 教授
大山　良一　　第一工科大学共通教育センター 准教授
竹下　俊一　　第一工科大学共通教育センター 准教授
倉元　賢一　　第一工科大学共通教育センター 准教授
萩原　和孝　　第一工科大学共通教育センター 講師／紀要編集事務局長
森田　大輔　　第一工科大学共通教育センター 助教

第一工科大学教職課程研究紀要　2023 年 12 月号（通巻 8 号）

2023 年 12 月 28 日　発行

編集・発行　第一工科大学教職課程教育研究会
鹿児島県霧島市国分中央 1-10-2
